

La modélisation fractale et la variabilité spatiale des phénomènes naturels

Die fraktale Modellierung und räumliche Veränderlichkeit der Naturphänomene

André Robert et André G. Roy

Volume 47, numéro 1, 1993

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/032928ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/032928ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

Les Presses de l'Université de Montréal

ISSN

0705-7199 (imprimé)

1492-143X (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Robert, A. & Roy, A. G. (1993). La modélisation fractale et la variabilité spatiale des phénomènes naturels. *Géographie physique et Quaternaire*, 47(1), 3–19. <https://doi.org/10.7202/032928ar>

Résumé de l'article

Le modèle fractal a suscité beaucoup d'intérêt récemment en sciences naturelles. Cette théorie de Benoit Mandelbrot s'avère particulièrement pertinente en géographie, puisque le modèle fractal traite de la variabilité spatiale des phénomènes naturels, de l'échelle d'observation de ces phénomènes et des propriétés géométriques résultantes. La première partie de cette revue consiste en une description du modèle fractal et des méthodes qui peuvent être utilisées pour estimer la dimension de Hausdorff et de l'intérêt immédiat des fractales en sciences naturelles. La deuxième partie traite, de façon générale, de l'application des fractales à la variabilité spatiale de divers phénomènes (pédologie, réseaux hydrographiques, turbulence, etc.). Une imbrication de différents niveaux de variation est généralement observée et un des intérêts du modèle provient de la variation de la dimension fractionnaire avec l'étendue d'échelles considérée. La troisième partie est consacrée à l'analyse des surfaces topographiques, de la microéchelle (quelques millimètres) à l'échelle des bassins-versants. Différents types d'utilisation du modèle fractal pour l'analyse des surfaces topographiques sont présentés. Plus particulièrement, il s'agit de l'utilisation des surfaces fractales comme surface initiale pour l'étude des processus géomorphologiques, de même que l'utilisation de la dimension fractionnaire pour caractériser la rugosité des surfaces topographiques (pour des études hydrauliques ou hydrologiques). Cette revue se termine en considérant brièvement les conséquences en géographie physique et en géomorphologie des découvertes récentes de la théorie du chaos. L'outil fractal est privilégié dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques.

LA MODÉLISATION FRACTALE ET LA VARIABILITÉ SPATIALE DES PHÉNOMÈNES NATURELS

André ROBERT et André G. ROY, Department of Geography, York University, 4700 Keele Street, North York, Ontario M3J 1P3 et Département de géographie, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale « A », Montréal, Québec H3C 3J7.

RÉSUMÉ Le modèle fractal a suscité beaucoup d'intérêt récemment en sciences naturelles. Cette théorie de Benoit Mandelbrot s'avère particulièrement pertinente en géographie, puisque le modèle fractal traite de la variabilité spatiale des phénomènes naturels, de l'échelle d'observation de ces phénomènes et des propriétés géométriques résultantes. La première partie de cette revue consiste en une description du modèle fractal et des méthodes qui peuvent être utilisées pour estimer la dimension de Hausdorff et de l'intérêt immédiat des fractales en sciences naturelles. La deuxième partie traite, de façon générale, de l'application des fractales à la variabilité spatiale de divers phénomènes (pédologie, réseaux hydrographiques, turbulence, etc.). Une imbrication de différents niveaux de variation est généralement observée et un des intérêts du modèle provient de la variation de la dimension fractionnaire avec l'étendue d'échelles considérée. La troisième partie est consacrée à l'analyse des surfaces topographiques, de la micro-échelle (quelques millimètres) à l'échelle des bassins-versants. Différents types d'utilisation du modèle fractal pour l'analyse des surfaces topographiques sont présentés. Plus particulièrement, il s'agit de l'utilisation des surfaces fractales comme surface initiale pour l'étude des processus géomorphologiques, de même que l'utilisation de la dimension fractionnaire pour caractériser la rugosité des surfaces topographiques (pour des études hydrauliques ou hydrologiques). Cette revue se termine en considérant brièvement les conséquences en géographie physique et en géomorphologie des découvertes récentes de la théorie du chaos. L'outil fractal est privilégié dans l'étude du comportement des systèmes dynamiques.

ABSTRACT Fractal ideas have generated a lot of interest recently in natural sciences. Mandelbrot's theory is particularly relevant to physical geographers since it deals in part with the spatial variability of natural phenomena, scales of observation, and resultant geometric properties. The first part of this review consists in a description of the fractal model and the methods that can be used to determine the fractal (Hausdorff) dimension, as well as a description of the immediate interests of fractals in natural sciences. The second part deals with the application of fractals to the spatial variability of different phenomena (e.g. pedology, drainage networks, turbulence, etc.). Nested levels of variation are generally observed and one basic interest of fractals is related to the fact that the fractal dimension varies with the range of scales considered. A third section is concerned with the analysis of topographic surfaces, from the microscale (e.g. a few millimetres) to the scale of drainage basins. Different ways of using fractal concepts for the analysis of topographic surfaces are presented. More specifically, these are the use of fractal surfaces as a null hypothesis and initial surface for the study of geomorphic processes, and the use of the fractal dimension for the characterization of surface roughness (for hydraulic and hydrologic studies). Finally, this review considers briefly the significance of chaos theory in physical geography and geomorphology. Fractal concepts are clearly predominant in the study of dynamic systems behaviour.

ZUSAMMENFASSUNG Die fraktale Modellierung und räumliche Veränderlichkeit der Naturphänomene. In den Naturwissenschaften hat das Fraktalmodell jüngst viel Interesse hervorgerufen. Diese Theorie von Benoit Mandelbrot erweist sich als besonders sachdienlich in der Geographie, da das Fraktalmodell von der räumlichen Veränderlichkeit der Naturphänomene, dem Beobachtungsmaßstab dieser Phänomene und den hieraus folgenden geometrischen Eigenschaften handelt. Der erste Teil dieser Übersicht besteht aus einer Beschreibung des Fraktalmodells und der Methoden, die man benutzen kann, um die Hausdorff-Dimension zu bestimmen sowie dem unmittelbaren Nutzen der Fraktale in den Naturwissenschaften. Der zweite Teil handelt in allgemeiner Weise von der Anwendung der Fraktale auf die räumliche Veränderlichkeit verschiedener Phänomene (z.B. Bodenforschung, Gewässernetze, Turbulenz u.s.w.). Im allgemeinen kann man eine Dachziegellagerung verschiedener Variationsebenen beobachten, und einer der Vorteile des Modells besteht in der Variation der Bruchdimension entsprechend dem Umfang der berücksichtigten Maßstäbe. Der dritte Teil ist der Analyse der topographischen Oberflächen gewidmet, vom Mikromaßstab (einige Millimeter) bis zum Maßstab der Abhangsbecken. Es werden verschiedene Verwendungstypen des Fraktalmodells für die Analyse der topographischen Oberflächen vorgestellt. Im besonderen geht es um die Verwendung der Fraktaloberflächen als Ausgangsoberfläche für das Studium der geomorphologischen Prozesse, wie auch die Verwendung der Fraktaldimension, um die Rauheit der topographischen Oberflächen zu bestimmen (für hydraulische oder hydrologische Studien). Diese Übersicht betrachtet schließlich kurz die Folgen der neuen Entdeckungen der Chaos-Theorie für die physische Geographie und die Geomorphologie.

INTRODUCTION

Durant la dernière décennie, la théorie des fractales a provoqué un vif intérêt et suscité de très nombreux travaux dans diverses disciplines scientifiques. Les articles de vulgarisation, d'intérêt plus général, où l'accent est davantage mis sur la fascination visuelle et esthétique ont consacré la popularité des fractales (voir, par exemple, Batty, 1985; Peitgen et Richter, 1986; Peitgen et Saupe, 1988). Bien qu'elle ait des antécédents dans les travaux des mathématiciens du début du siècle, la théorie des fractales de Mandelbrot a été élaborée de façon formelle au cours des années 1960 et 1970. Elle a connu une diffusion fulgurante à la suite de la parution de trois ouvrages (Mandelbrot, 1975a, 1977, 1982), dont le dernier, *The Fractal Geometry of Nature*, consacre en quelque sorte deux décennies de travaux rédigés sur les fractales et leur importance pour décrire et expliquer les propriétés géométriques des phénomènes naturels.

Les fractales rendent possible la description mathématique de l'irrégularité et de la complexité des formes naturelles. La géométrie euclidienne classique repose sur des formes géométriques parfaites (le cercle, le carré, le rectangle, etc.) mais en même temps abstraites par rapport aux formes réelles que traitent les sciences de la nature. Par exemple, peut-on dire comme Robert Pirsig dans son fameux roman *Traité du zen et de l'entretien de la motocyclette* que le paysage du Dakota est aussi plat que la géométrie d'Euclide? Ou encore peut-on décrire un sapin par un simple cône ou un terrain fraîchement labouré par des ondulations régulières? Comment décrit-on mathématiquement un nuage ou un jet turbulent? La géométrie classique nous force à ramener les objets naturels à des formes simples à manipuler mathématiquement. En l'absence d'outils mieux adaptés, ce carcan rigide a dominé notre approche de la nature depuis l'Antiquité, sans toutefois en permettre une description adéquate. L'attrait des fractales est de fournir un instrument mathématique capable de saisir la complexité géométrique des objets et d'ainsi briser les limites imposées par la géométrie euclidienne.

La géographie physique constitue l'un des domaines les plus appropriés à l'application de la théorie de Benoit Mandelbrot. En effet, cette théorie traite essentiellement de l'échelle d'observation et de ses effets sur les propriétés métriques des phénomènes. Elle permet de modéliser la variabilité spatiale et de saisir la complexité des phénomènes naturels. Burrough (1984) souligne l'intérêt que présentent les fractales en géographie et dans les sciences de la nature en général. Il a démontré que les fractales peuvent constituer un outil efficace, nouveau, et stimulant pour l'étude des phénomènes géophysiques tout en illustrant clairement les limites du modèle. Certaines différences fondamentales apparaissent cependant entre les données réelles et les fonctions stochastiques issues de la théorie des fractales (Burrough, 1983a, b). Depuis, de très nombreuses études ont été publiées afin de clarifier et d'étayer les idées préconisées par Burrough (1981, 1984, 1985). Plus récemment, une revue du sujet préparée par Goodchild et Mark (1987) a identifié différents aspects de la géographie pour lesquels les fractales constituent un changement important dans la pen-

sée. L'article de Goodchild et Mark (1987) met l'accent sur la notion d'autosimilarité statistique et les modèles d'organisation spatiale, limitant ainsi l'intérêt des fractales à des champs géographiques spécifiques et peut-être trop restreints. Nous croyons cependant que la théorie des fractales est essentielle à l'étude de la géographie physique (et des sciences naturelles en général). Ces aspects ne sont pas traités à fond par Goodchild et Mark (1987). Finalement, le développement rapide de la théorie et de ses applications en sciences de la Terre (voir Culling, 1987a, b, 1988a, b, 1989; Roy *et al.*, 1987; Robert, 1988a; Elliot, 1989; Jones *et al.*, 1989; Turcotte, 1989) illustrent clairement l'importance accrue de la modélisation fractale en géographie physique. Cette éclosion de l'utilisation des fractales en géographie physique exige que l'on fasse le point sur le sujet.

L'article se divise en quatre parties. La première consiste en une brève description du modèle fractal et de ses propriétés fondamentales. Elle traite de l'estimation de la dimension fractale selon diverses méthodes et dévoile l'intérêt immédiat des fractales pour l'étude des phénomènes géophysiques. La deuxième partie porte, surtout, sur la variabilité spatiale des phénomènes naturels. L'analyse fractale de divers phénomènes (pédologiques, karstiques, hydrauliques, hydrologiques) met en évidence leur variabilité en fonction de l'échelle. Dans ce contexte, l'imbrication de plusieurs échelles de variation est importante puisqu'elle pourrait être révélatrice des processus sous-jacents aux phénomènes. Les objets et processus naturels apparaissent souvent comme ayant des propriétés statistiques dites « multifractales ». En troisième lieu, le champ d'analyse de la géographie physique auquel les fractales ont le plus contribué consiste probablement en l'étude des surfaces topographiques. La modélisation fractale à toutes les échelles des paysages, et particulièrement de la topographie, y est aussi décrite et expliquée. Deux approches distinctes sur l'utilisation des fractales dans l'étude des surfaces naturelles sont présentées : celle de Goodchild et Mark (1987) qui préconisent le recours aux surfaces fractales comme hypothèse nulle ou surface initiale pour l'étude des processus géomorphologiques, et celle proposée par Culling (1986b, 1987a, 1988, 1989) sur les surfaces fractales comme résultantes de la théorie de la diffusion de l'évolution des paysages. Finalement, une brève présentation des liens entre la théorie du chaos, les fractales et la géographie physique clôt l'article.

DESCRIPTION DU MODÈLE FRACTAL

Avant de considérer certaines propriétés mathématiques du modèle fractal, illustrons à l'aide d'un exemple simple en quoi les fractales s'avèrent d'un intérêt particulier en géomorphologie. La figure 1 représente un profil topographique hypothétique obtenu à trois échelles différentes. On note immédiatement qu'il est impossible de déterminer l'échelle d'observation du profil à partir du degré d'irrégularité de la surface. L'allure générale du profil demeure la même en dépit du fait que l'échelle est considérablement modifiée. Cette propriété est appelée autosimilarité ou autoaffinité (ces concepts seront définis de façon plus détaillée plus loin dans cette section). De plus, un indice mathématique peut être utilisé pour décrire les propriétés géométriques de ce profil,

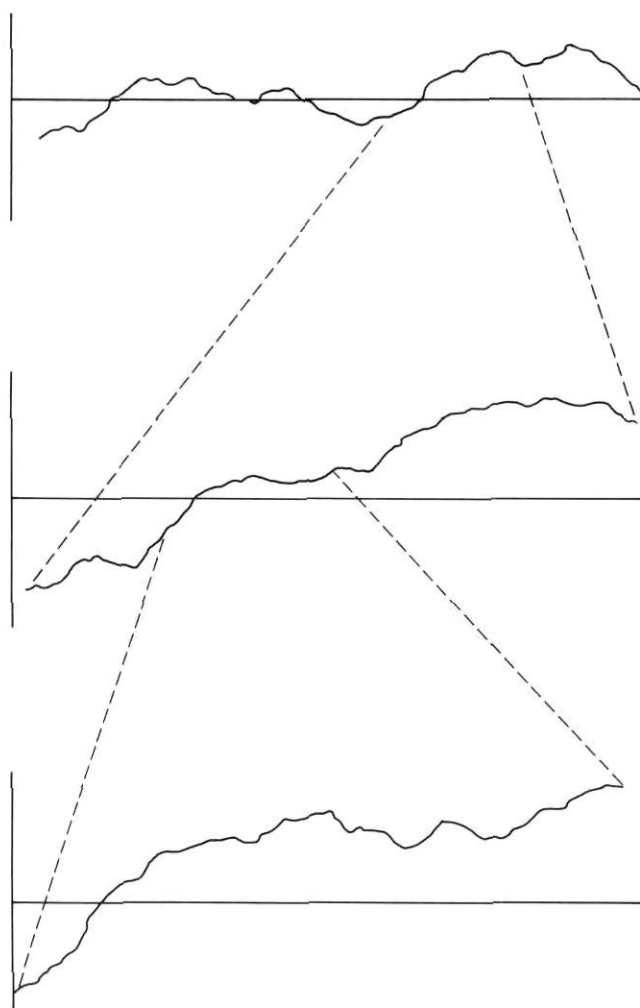


FIGURE 1. Illustration, à l'aide d'un exemple géomorphologique, des concepts de base de la géométrie fractale (d'après Gravel, 1988).

Illustration of the basic concepts of fractal geometry using a geomorphological example (after Gravel, 1988).

c'est-à-dire principalement son degré d'irrégularité constant observé à toutes les échelles spatiales et les liens statistiques existant entre les mesures successives (qui dans ce cas-ci sont des mesures d'altitudes). Cet indice consiste en la dimension fractale ou fractionnaire du profil et sera également défini en détail dans les sections qui suivent. L'autosimilarité et la dimension fractionnaire peuvent s'appliquer à divers types de courbes, soit des courbes fermées dans le plan (e.g. courbes de niveau, tracé des littoraux), des séries statistiques unidimensionnelles représentant des phénomènes naturels (séries climatologiques, pédologiques, etc.) et des surfaces topographiques naturelles.

Certains concepts de base reliés au modèle fractal peuvent être décrits à l'aide de l'exemple illustré à la figure 2, où r représente un rapport de similarité et N le nombre de parties déduites de l'ensemble. La figure 2 montre aussi les rapports entre les notions de dimension euclidienne et d'autosimilarité d'une part, et les valeurs de N et de r (rapport de similarité) d'autre part. On peut généraliser ce concept pour

$$D = 1$$

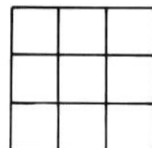


$$N = 3$$

$$r = 1/3 = 1/N$$

$$Nr^1 = 1$$

$$D = 2$$

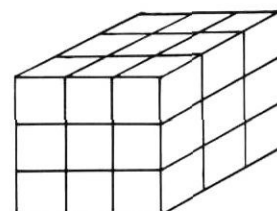


$$N = 9$$

$$r = 1/3 = 1/N^{1/2}$$

$$Nr^2 = 1$$

$$D = 3$$



$$N = 27$$

$$r = 1/3 = 1/N^{1/3}$$

$$Nr^3 = 1$$

GÉNÉRALISATION

$$Nr^D = 1 \quad \text{ou} \quad N = r^{-D}$$

$$\text{ET} \quad D = \frac{\log N}{\log (1/r)}$$

FIGURE 2. Interprétation de la notion de dimension et de l'autosimilarité (d'après Voss, 1988).

Interpretation of the concept of dimension and autosimilarity (after Voss, 1988).

définir la dimension fractionnaire (D) d'une entité géométrique à partir de N et de r . La courbe de Koch est maintenant l'exemple classique de l'application de ce concept (fig. 3). Cette courbe est un exemple idéal d'un objet fractal. Chaque portion de la courbe de Koch représente une image réduite de l'ensemble, d'où une similarité géométrique à toutes les échelles d'observation. Cette propriété d'un objet représente l'autosimilarité stricte, c'est-à-dire l'imbrication successive de formes géométriques identiques, sauf en ce qui a trait à leur taille. En conséquence, on ne peut déterminer l'échelle de l'objet à partir de son allure géométrique. De plus, cette ligne (fig. 3) a une longueur indéterminée puisque cette dernière augmente avec l'augmentation de chaque degré de résolution par un facteur de $4/3$. Dans cet exemple, la valeur de 1,2618 représente la dimension fractionnaire ou dimension de Hausdorff (D) du tracé. Un exemple additionnel est présenté à la figure 3, où un carré est utilisé pour produire l'irrégularité (dans ce cas, $D = 1,465$). L'idée de dimension fractionnaire revient à Hausdorff (1919) et Besicovitch (1929) et la théorie mathématique sur les mesures et dimensions de Hausdorff se trouve dans Rogers (1970), Adler (1981), Falconer (1985), ainsi que Culling (1986b).

Une des propriétés bien connues des formes fractales consiste en la relation entre la longueur d'une ligne (L) et

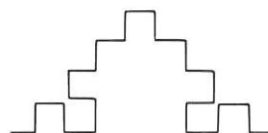
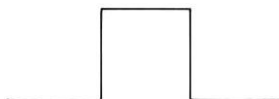
(a) $D = \log 4 / \log 3 = 1,2618$



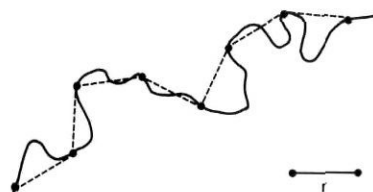
FIGURE 3. Courbe de Koch: exemple classique de courbe fractale (voir Burrough, 1983a).

Example of the ideal fractal curve (Koch); see Burrough (1983a).

(b) $D = \log 5 / \log 3 = 1,4650$



(i) MÉTHODE DE RICHARDSON



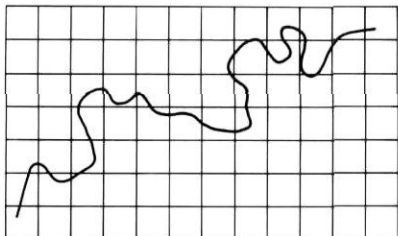
N: Nombre d'unités r utilisées le long du tracé

$$N \propto r^{-D}$$

L (Longueur du tracé) = $N \cdot r$

$$L \propto r^{1-D}$$

(ii) MÉTHODE DE LA GRILLE



$$N(r) \propto r^{-D}$$

$N(r)$: Nombre de carrés touchés par le tracé



FIGURE 4. Méthodes empiriques d'estimation de la dimension fractionnaire (d'après Voss, 1988).

Empirical methods of estimating fractal dimensions (after Voss, 1988).

l'unité de mesure utilisée (r). Par exemple, pour une ligne fractale,

$$L = k r^{1-D} \quad (1)$$

où k est une constante (Richardson, 1961; Mandelbrot, 1967), ce qui implique l'augmentation de la longueur de la ligne mesurée avec la diminution de l'unité de mesure utilisée (fig. 4). L'équation (1) s'applique évidemment aux courbes fractales illustrées à la figure 3, mais également à des courbes représentant divers phénomènes naturels tels qu'illustrés par Mandelbrot (1967) pour le tracé des lignes de rivage. La valeur de D estimée à partir de l'équation (1) représente donc la dimension fractionnaire du tracé considéré. Plus la valeur de D est élevée, plus le tracé considéré est irrégulier et plus la longueur estimée augmente rapidement avec une diminution du degré de résolution (r). Cette méthode a été employée, par exemple, pour estimer la dimension fractale des contours de particules sédimentaires (Orford et Whalley, 1983; Whalley et Orford, 1982, 1989; Hayward et

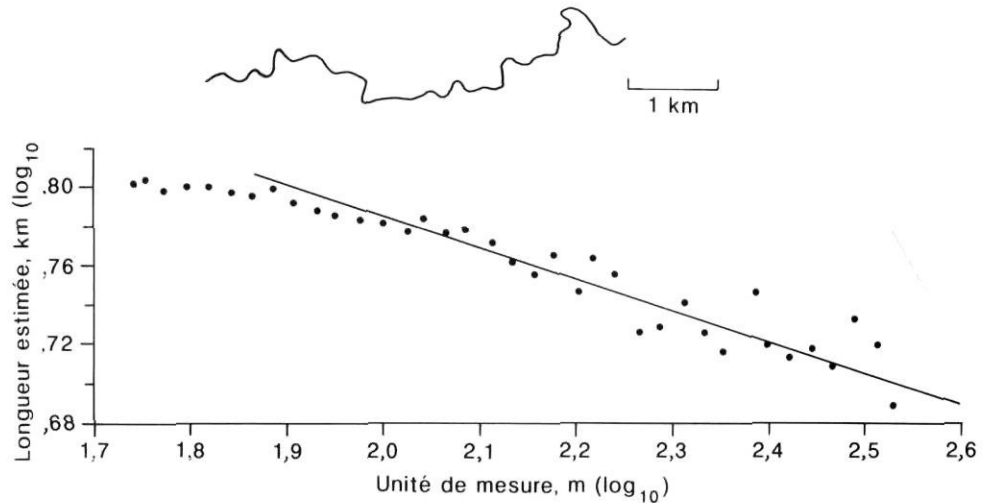
al., 1989), ainsi que pour les courbes de niveau par Goodchild (1982), Roy *et al.* (1987) et Culling et Datko (1987). Il s'agit d'une méthode simple à appliquer pour estimer les dimensions fractionnaires de courbes fermées dans un plan ou de segments de ces courbes (Mandelbrot, 1975b; Burrough, 1984; Mark, 1984; Snow, 1989). Un exemple d'application est présenté à la figure 5. Le tracé considéré est ici celui d'un segment de la rivière Don (Angleterre) tel que relevé originellement sur un feuillet topographique à l'échelle de 1/25 000. La longueur estimée du tracé de la rivière diminue dans ce cas-ci de 6,3 à 5 km lorsque l'unité de mesure (r) utilisée pour estimer cette longueur augmente de 50 à approximativement 300 m. En utilisant l'équation (1), la valeur estimée de la dimension fractionnaire pour cette partie du tracé de la rivière est de 1,16. Une méthode similaire à la relation de Richardson (équation 1) est également présentée à la figure 4. Le principe consiste ici à superposer une grille régulière sur la ligne à l'étude et à compter le nombre de carrés intersectés par la ligne à l'étude. Ces méthodes sont également présentées et expliquées en détail par Longley et Batty (1989a, b).

Le concept des fractales peut être étendu aux surfaces et aux volumes. Une surface fractale autosimilaire et isotropique présente une dimension comprise entre 2 et 3. Une courbe de niveau dans le plan horizontal et le profil d'une section verticale d'une surface fractale sont autosimilaires et ont une dimension fractionnaire inférieure de 1 à celle de la surface. On trouve de nombreuses simulations de surfaces fractales dans la littérature (voir Mandelbrot, 1975b, 1982; Goodchild, 1980; Adler, 1981; Culling, 1986a; Goodchild et Mark, 1987). La dimension dans le plan horizontal peut être estimée à partir du diagramme de Richardson (équation 1) en utilisant la courbe de niveau topographique associée à une certaine altitude (Culling, 1988a), alors que la dimension d'une section verticale peut être estimée à partir de la variation de l'altitude le long d'un transect et de la théorie des processus browniens fractionnaires (Mandelbrot, 1965, 1975b; Mandelbrot et Van Ness, 1968).

En termes plus généraux, les propriétés fractales d'une série unidimensionnelle de valeurs sont généralement décrites et estimées par le semi-variogramme. Par exemple, Burrough (1983a, b) et Culling (1986a) ont employé cette méthode pour l'analyse fractale des séries spatiales des pro-

FIGURE 5. Application de la méthode de Richardson à un tracé de rivière (Don River, Royaume-Uni)

Application of Richardson's method for the estimation of the length of a river segment (Don River, United Kingdom).



priétés pédologiques, ainsi que Mark et Aronson (1983), Ahnert (1984), Culling (1986b), et Culling et Datko (1987) pour les propriétés fractales des surfaces naturelles. La marche aléatoire (ou mouvement brownien) est souvent utilisée pour illustrer comment les propriétés fractales d'une série de points peuvent être estimées à partir du semi-variogramme. La marche aléatoire, désignée ici $B_H(t)$, est un exemple de processus stochastique non stationnaire et autosimilaire. De façon plus spécifique, $B_H(t)$ a la propriété que, pour chaque $\varepsilon > 0$, la séquence des valeurs de $B_H(t + \varepsilon) - B_H(t)$ soit une séquence de valeurs aléatoires et indépendantes, distribuées normalement, avec une moyenne de zéro et une variance égale à ε . Les processus qui possèdent cette propriété (augmentation de la variance avec une augmentation de la distance entre les observations) sont définis comme étant non stationnaires. Le mouvement brownien est autosimilaire en ce sens que pour toute valeur de $u > 0$ et toute valeur de s , $B_H(t + s) - B_H(t)$ a exactement la même distribution de probabilité que $[B_H(t + su) - B_H(t)] / u^H$ (Mandelbrot et Van Ness, 1968), où H est un paramètre d'échelle qui est égal à 0,5. Pour être plus précis, le terme autoaffinité devrait être ici employé plutôt qu'autosimilarité (Voss, 1988). L'autoaffinité diffère de l'autosimilarité en ce sens que les coordonnées des axes horizontal et vertical diffèrent et que ces deux axes ne sont pas interchangeables. L'autosimilarité s'applique, par exemple, aux courbes de niveau et au tracé d'une rivière ou d'un littoral (fig. 3, 4 et 5), alors que l'autoaffinité se rapporte aux propriétés statistiques des séries unidimensionnelles. Les profils topographiques possédant les propriétés fractales sont ainsi caractérisés par l'autoaffinité.

Un corollaire important de l'autoaffinité en ce qui a trait au mouvement brownien (ou marche aléatoire) est que

$$E [B_H(t + S) - B_H(t)]^2 = C_H S^{2H} \quad (2)$$

où E représente la valeur attendue, C_H est une constante égale à 1 et $H = 0,5$ (Mandelbrot et Wallis, 1969b). En variant le paramètre H de l'équation (2) de la valeur standard de 0,5 à n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 1, on obtient selon Mandelbrot toute une famille de processus stochastiques appelés *mouvements browniens fractionnaires (fBm)*. Ces processus couvrent une étendue de variations spatiales

(ou temporelles) allant des courbes très lisses aux courbes très irrégulières. Le processus fBm est défini pour $0 < H < 1$ et l'exposant de l'équation (2) peut donc varier entre 0 et 2. Ces mouvements browniens fractionnaires (fBm) possèdent également la propriété d'autoaffinité, l'autoaffinité ayant le même sens que celui décrit précédemment pour la marche aléatoire (Mandelbrot, 1965, 1985; Mandelbrot et Van Ness, 1968).

De plus, la séquence des valeurs de z_i , qui représentent les différences entre les valeurs successives de $B_H(t)$ pour le mouvement brownien fractionnaire

$$z_i = B_H(t+1) - B_H(t) \quad (3)$$

où t est un entier, est appelée bruit gaussien fractionnaire (fGn). À l'opposé de la marche aléatoire, les valeurs successives de z_i pour le mouvement brownien fractionnaire ne sont pas indépendantes les unes des autres et l'autocorrélation à une distance h nous est donnée par

$$\rho(h) = 0.5 [(h+1)^{2H} - 2h^{2H} + (h-1)^{2H}] \quad (4)$$

(pour $h \geq 1$ et $0 < H < 1$; Mandelbrot et Wallis 1969b). Différentes séries de fGn possédant les propriétés statistiques définies par les équations 3 et 4 sont illustrées à la figure 6. À partir de l'équation (4), on remarque que pour $H > 0,5$, un processus fGn a une autocorrélation positive, indiquant une persistance des valeurs positives ou négatives de z_i . Pour $H < 0,5$, l'autocorrélation est négative, indiquant que des valeurs positives et négatives de z_i tendent à alterner. Lorsque $H = 0,5$, l'autocorrélation est nulle (tel que défini précédemment pour le mouvement brownien) et il s'agit d'un bruit blanc. En résumé, le mouvement brownien standard est caractérisé par une valeur de H égale à 0,5 ce qui implique une séquence de valeurs successives de $B_H(t+i) - B_H(t)$ aléatoires et indépendantes. À l'opposé, le mouvement brownien *fractionnaire* (fBm) est caractérisé par un exposant H variant entre 0 et 1; les différences entre les valeurs successives des séries correspondant au mouvement brownien fractionnaire sont autocorrélées et cette corrélation dépend de la distance h séparant les observations et du paramètre H (équation 4).

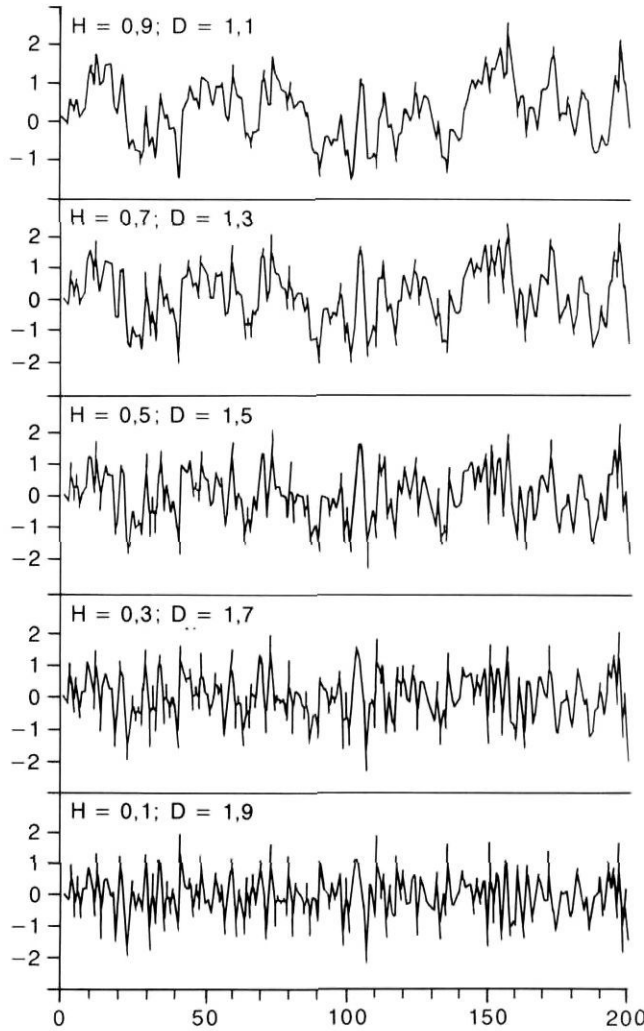


FIGURE 6. Simulations de différents processus fGn et dimensions qui leur sont associées (valeurs centrées-réduites; d'après Robert, 1988a).

Simulations of different fGn processes and associated fractal dimensions (zero mean and unit variance to facilitate comparisons; after Robert, 1988a).

Orey (1970) a montré que la dimension fractionnaire des séries fractales est égale à $2-H$. En supposant que l'on traite de surfaces fractales autoaffines et isotropiques, le semi-variogramme représente donc un moyen simple d'estimer la dimension fractionnaire d'une série spatiale empirique $Z(x_i)$ puisque

$$2 \gamma(h) = C_H h^{2H} \quad (5)$$

et que

$$2 \hat{\gamma}(h) = 1/(N-h) \sum_{i=1}^{N-h} [z(x_i+h) - z(x_i)]^2 \quad (6)$$

(où $N-h$ représente le nombre de paires d'observations séparées par la distance h). La fonction $\gamma(h)$ est appelée semi-variogramme et sa valeur estimée ($\hat{\gamma}(h)$) procure l'information de base nécessaire à la description et l'explication de la variation spatiale d'un phénomène naturel (Oliver et Webster,

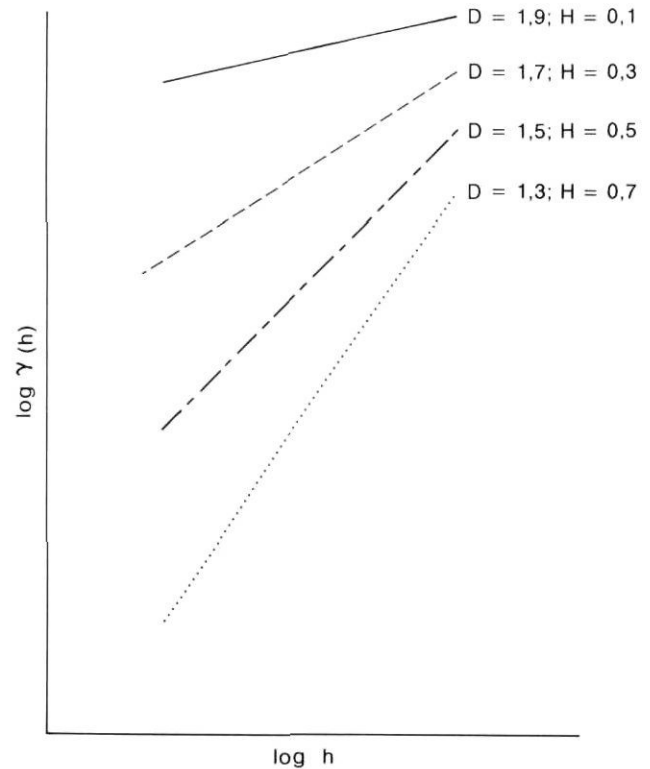


FIGURE 7. Illustration schématique des semi-variogrammes associés à différents processus fractals (voir Burrough, 1983a).

Schematic illustration of semi-variograms corresponding to fractal processes of different dimensions (see Burrough, 1983a).

1986; McBratney et Webster, 1986). Par conséquent, la semi-variance à divers pas d'échantillonnage h est estimée à partir de l'équation (6) et le paramètre H (et D puisque $D=2-H$) est ensuite estimé selon l'équation (5) (à partir d'une régression linéaire entre $\log \hat{\gamma}(h)$ et $\log h$). Des semi-variogrammes correspondant à des processus fractals de dimensions variées sont illustrés à la figure 7. Les processus caractérisés par une forte valeur de D présentent donc un faible taux d'augmentation de la semi-variance avec la distance (fig. 7) et les fréquences élevées dominent les fluctuations. À l'opposé, les processus caractérisés par une faible valeur de D présentent un semi-variogramme avec une forte pente, où les fréquences d'oscillations plus faibles dominent la série.

Les deux méthodes décrites en détail ci-dessus (c'est-à-dire le diagramme de Richardson et le semi-variogramme) constituent sans aucun doute les méthodes les plus employées pour estimer la dimension fractale d'un phénomène naturel. Il en existe toutefois d'autres décrites par Burrough (1984) (par méthodes d'estimation basées sur la relation périmètre-surface, le spectrum de puissance et l'entropie) et utilisées, notamment, par Lovejoy (1982), Lovejoy et Mandelbrot (1985), Culling (1987), Brown et Scholz (1985) ainsi que Fox (1989). Un des problèmes méthodologiques susceptibles de se poser est la variabilité des résultats obtenus lorsque la dimension fractionnaire d'un phénomène est estimée selon différentes méthodes (voir Bradbury et Reichelt (1983) et Bradbury *et al.* (1984)). Les

comparaisons d'un certain nombre de méthodes présentées par Roy *et al.* (1987), ainsi que celles de Culling et Datko (1987) laissent croire qu'il n'y a pas de variation systématique de la dimension fractionnaire estimée en fonction de la méthode utilisée. À titre d'exemple, les résultats présentés au tableau I sur l'application de différentes méthodes à un modèle numérique d'altitudes (MNA) pour la région frontalière entre le Québec et le New Hampshire montrent que les mesures individuelles peuvent varier considérablement, mais que les dimensions moyennes estimées selon les diverses méthodes ne diffèrent pas de façon significative. Toutefois, l'étude récente et détaillée de Klinkenberg et Goodchild (1992) laisse croire que la méthode de Richardson (équation 1) sous-estime les dimensions fractionnaires des surfaces topographiques et n'est pas suffisamment robuste pour permettre de distinguer clairement des surfaces possédant des degrés d'irrégularité variés.

VARIABILITÉ DES PHÉNOMÈNES NATURELS

Les processus browniens fractionnaires ont été originellement élaborés comme modèle statistique du phénomène de Hurst (Hurst, 1951) que l'on observe dans les séries météorologiques et hydrologiques (Mandelbrot, 1965; Mandelbrot et Wallis, 1968, 1969a, b). L'effet de Hurst consiste en une forme de persistance, c'est-à-dire une autocorrélation positive qui se manifeste parfois au-delà de la longueur des séries disponibles. L'application des modèles browniens fractionnaires aux séries temporelles hydrologiques a aussi été discutée de façon détaillée par Klemes (1974), McLeod et Hipel (1978) et Kirkby (1987). Un comportement statistique correspondant au modèle fractal est parfois défini comme étant un phénomène de Hurst (e.g. Culling, 1986b).

Il existe de nombreux domaines des sciences naturelles pertinents à la géographie physique et pour lesquels les fractales sont d'un intérêt certain. Parmi ceux-ci, les propriétés fractales et la structure de la variabilité spatiale des phénomènes pédologiques ont particulièrement attiré l'attention (Burrough, 1983a, b, c; Armstrong, 1986; Culling, 1986a). Dans une étude détaillée et innovatrice, Burrough (1983a, b) a tiré des conclusions importantes sur la structure d'autocorrélation spatiale des propriétés pédologiques et sur l'utilité des fonctions fractales pour modéliser la variation spatiale de ces propriétés. Il y est clairement démontré que les données pédologiques sont fractales, en ce sens qu'un changement de l'échelle d'observation (i.e. pour un pas d'échantillonnage plus petit) introduit une variabilité ou une complexité additionnelle. Culling (1986a) a particulièrement insisté sur la structure fractale de la variation fine ou détaillée du pH. La dimension de Hausdorff a également été présentée par Burrough comme une mesure de l'importance relative des variations pédologiques de courtes et de longues étendues. À ce propos, tous les résultats des études mentionnées précédemment dans le domaine pédologique montrent que les variations de courtes étendues sont dominantes (D étant généralement supérieur à 1,5), et les différences positives et négatives entre les observations successives tendent à alterner (Culling, 1986a). Il y a antipersistance du comportement de la variable mesurée.

TABLEAU I

Dimensions fractionnaires estimées selon différentes méthodes pour le modèle numérique d'altitudes (MNA) de la région de Moose Bog, New Hampshire (d'après Gravel, 1988 et Roy et al., 1987).

	D	D_{min}	D_{max}
Variogramme de surface	2,16	—	—
Variogrammes-profiles E-O n = 9	1,13	1,06	1,19
Variogrammes-profiles N-S n = 7	1,17	1,09	1,28
Courbes de niveau (extraites) n = 47	1,09	1,01	1,28
Courbes de niveau numérisées (à partir du feuillet 1/24 000; N=13)	1,17	1,06	1,33

n est le nombre de profils ou courbes de niveau utilisés

Malgré ces résultats, il existe toutefois des différences fondamentales entre le modèle fractal type et la variabilité spatiale des données pédologiques. Alors que le modèle fractal indique une augmentation de la semi-variance avec une augmentation de la distance entre les points d'échantillonnage (voir fig. 7), les données pédologiques sont souvent caractérisées par des semi-variogrammes où une valeur maximale de $\hat{\gamma}(h)$ est observée à une certaine distance h . De plus, le semi-variogramme des données pédologiques présente généralement des zones assez restreintes et distinctes où le modèle fractal peut s'appliquer. Ces bandes fractales sont parfois séparées par des zones de transition plus ou moins marquées. Il s'agit en fait d'imbrication de différents niveaux de variation représentant des processus pédologiques superposés et indépendants, chacun de ces processus agissant à des échelles caractéristiques (Burrough, 1987). Ces propriétés fréquemment rencontrées en milieu naturel (ainsi que la forme générale du semi-variogramme correspondant) sont illustrées à la figure 8. La valeur de c (fig. 8) représente la semi-variance maximale observée (ce qui est également la variance de la série) et h_{max} constitue l'étendue du semi-variogramme, c'est-à-dire la distance maximale à laquelle le modèle fractal s'applique. Un exemple tiré de la littérature est également présenté à la figure 9. Cet exemple provient d'une étude détaillée de la microtopographie du lit des cours d'eau à fond de graviers. Dans cet exemple, la semi-variance maximale observée est de l'ordre de 8 cm^2 et l'étendue du processus (h_{max}), soit la distance maximale à laquelle le modèle fractal s'applique est approximativement 75 cm (Robert, 1988b). Cet exemple sur la rugosité de surface dans les cours d'eau naturels sera également repris en détail dans la prochaine section. L'imbrication de différents niveaux de variation et la présence de bandes fractales étroites semblent être d'avantage la norme que l'exception en modélisation fractale des phénomènes naturels (voir Orford et Whalley, 1983; Mark et Aronson, 1984; Culling et Datko, 1987; Robert, 1988b).

Les fortes valeurs de dimension fractionnaire généralement observées pour les données pédologiques ont des conséquences pratiques, surtout en ce qui concerne

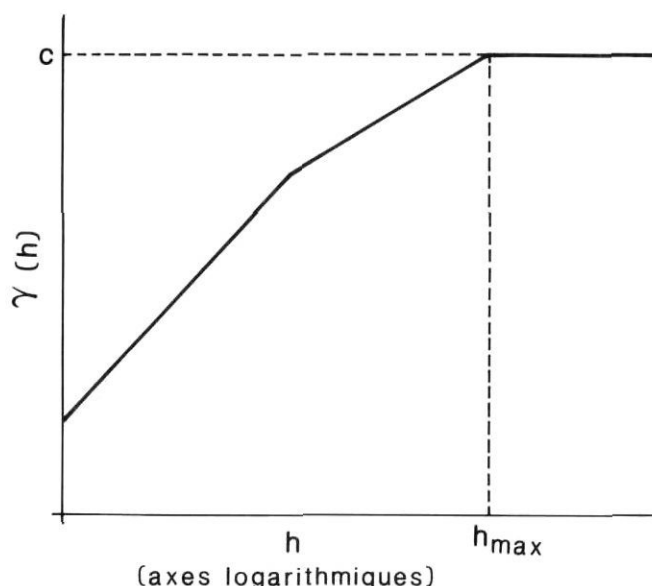


FIGURE 8. Représentation schématique du semi-variogramme caractéristique associé à divers phénomènes naturels.

Schematic illustration of characteristic semi-variograms corresponding to various natural phenomena.

l'échantillonnage. Des valeurs élevées de dimension fractionnaire impliquent une grande variabilité spatiale ainsi qu'un degré de complexité constant, malgré une diminution du degré de résolution. Par conséquent, la mesure sur le terrain de variables à des échelles préalablement déterminées, l'utilisation de valeurs moyennes et l'emploi de différentes techniques d'interpolation doivent être remises en question par suite de l'analyse fractale des données pédologiques. De fait, dans une surface extrêmement complexe (D de l'ordre de 2,9), l'interpolation devient virtuellement impossible tant elle est désorganisée et antipersistante. Pour Culling (1986a, 1988b), le modèle fractal propose une vision alternative du monde réel, vision fondée sur une conception plus fine de la réalité et sur la notion d'irrégularité. Culling (1986a) avance également la notion selon laquelle la plupart des processus en géomorphologie prennent place à l'intérieur de bandes fractales étroites et de dimension fractionnaire généralement élevée.

L'analyse fractale de la variabilité des phénomènes naturels s'étend également aux propriétés géométriques des réseaux hydrographiques et aux phénomènes de turbulence. L'analyse fractale des réseaux de drainage a connu récemment un essor considérable (Gupta et Waymire, 1989; La Barbera et Rosso, 1989; Tarboton *et al.*, 1989; Thornes, 1990; Rosso *et al.*, 1991; Stark, 1991; Montgomery et Dietrich, 1992). Par exemple, La Barbera et Rosso (1989) montrent que les propriétés géométriques des réseaux de drainage des bassins-versants sont adéquatement représentées par le modèle fractal dont la dimension varie entre 1,5 et 2 (valeur moyenne de 1,7). Ces dimensions fractionnaires sont déterminées à partir des rapports de bifurcation (*i.e.* rapport du nombre de segments d'un certain ordre divisé par le nombre de segments de l'ordre supérieur) et du rapport des longueurs des segments d'ordres successifs. Ces propriétés

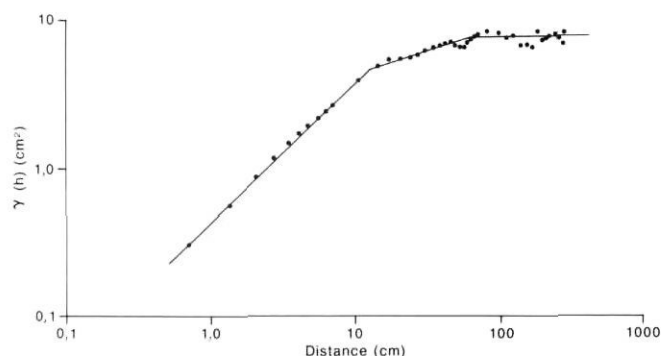


FIGURE 9. Exemple d'un semi-variogramme caractéristique de la rugosité de surface dans les rivières à lits graveleux (d'après Robert, 1988b).

Example of the characteristic semi-variogram used to model the surface roughness properties in gravel-bed rivers (after Robert, 1988b).

renvoient directement aux travaux antérieurs de Horton (1945) et Strahler (1957) sur les lois de la composition des réseaux hydrographiques. Un autre aspect relié à la structure fractale des bassins hydrographiques concerne la longueur estimée des cours d'eau et l'interprétation fractale de la relation entre la longueur du cours d'eau principal (L) et la superficie de drainage (A) (Mesa et Gupta, 1987; Hjelfelt, 1988; La Barbera et Rosso, 1989; Robert et Roy, 1990). Il existe présentement deux interprétations possibles de l'exposant dans la relation de Hack (1957) où

$$L \propto A^b \quad (7)$$

Plus précisément, l'interprétation allométrique de la relation (*i.e.*, changement de forme avec l'augmentation de la taille; Church et Mark, 1980) est remise en question. Mandelbrot (1982) avance que les longueurs des cours d'eau sont caractérisées par une dimension fractionnaire puisque la longueur estimée est fonction de l'échelle d'observation (voir fig. 5). Plus précisément, il montre que la valeur de $b=0,6$ (équation 7) obtenue par Hack (1957) résulte du fait que la dimension fractionnaire des cours d'eau principaux est égale à 1,2 et que l'exposant b de la relation entre la longueur des cours d'eau principaux et la superficie de drainage est égal à $D/2$. Les travaux de Robert et Roy (1990) montrent toutefois que l'interprétation de la valeur de b varie en fonction de l'échelle de la carte utilisée et que l'interprétation fractale de b (équation 7) est valable, tout au moins à certaines échelles.

Finalement, un autre domaine particulièrement négligé en géographie physique a trait à la modélisation fractale de la turbulence. Par suite des travaux originaux de Mandelbrot (1974, 1975c) sur les phénomènes de turbulence, la modélisation fractale de ces phénomènes a suscité relativement peu d'intérêt jusqu'aux travaux récents de Sreenivasan (1986, 1991), Sreenivasan et Meneveau (1986), Sreenivasan *et al.* (1989) et Ait-Kheddache et Rajala (1987). Un exemple de leurs travaux est illustré à la figure 10 où un « jet » est introduit dans une écoulement turbulent. Le contour de ce jet est irrégulier et se caractérise par une dimension fractionnaire de 1,36 (celle-ci étant obtenue par la méthode de la grille et du diagramme présenté au bas de la fig. 10). Une des principales conclusions de ces travaux est que plusieurs aspects des écoulements turbulents, caractérisés par une superposi-

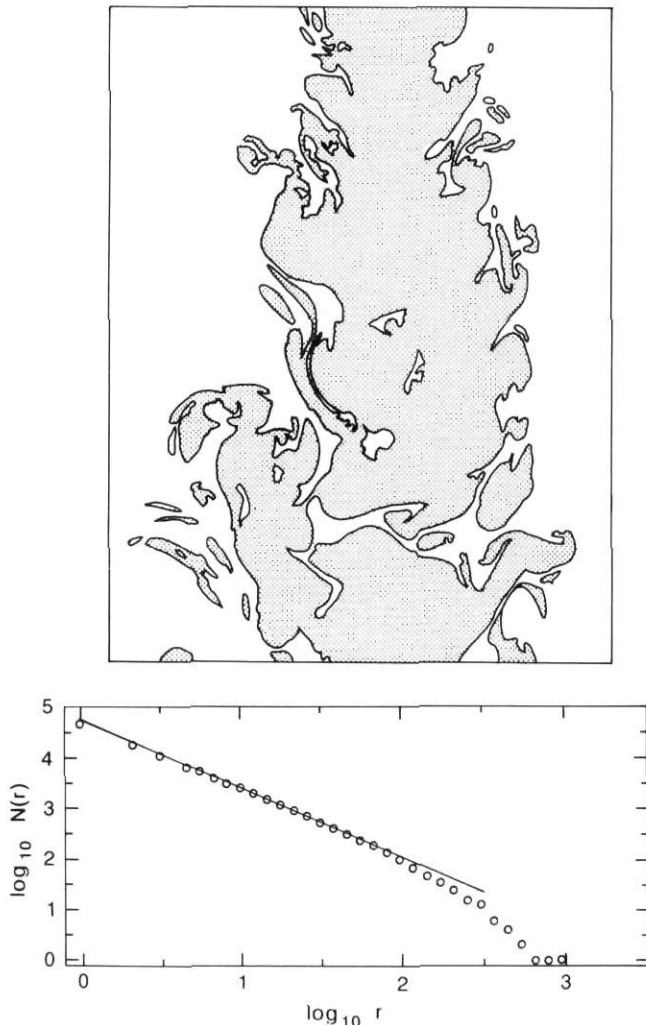


FIGURE 10. Contour d'un «jet» dans un écoulement turbulent et diagramme de Richardson correspondant (d'après Sreenivasan, 1991).

Contour of a jet in a turbulent flow and corresponding Richardson's plot (after Sreenivasan, 1991).

vision détaillée et relativement nouvelle des surfaces topographiques, tant du point de vue de la modélisation descriptive (Pentland, 1984) que de l'intégration théorique des processus ou mécanismes d'évolution des paysages.

Des propriétés d'ensemble du paysage (en termes de signature statistique et d'autocorrélation des différences d'altitudes ou pentes locales) se dégagent très bien des nombreuses études des surfaces topographiques. En premier lieu, les études détaillées de Mark et Aronson (1984), Culling et Datko (1987), Roy *et al.* (1987), et Culling (1988a) montrent que les surfaces topographiques se caractérisent par deux bandes fractales. Pour des distances relativement faibles (intervalle d'échantillonnage généralement de l'ordre de 50 m; voir Culling, 1988a), les valeurs de D généralement obtenues varient entre 2,1 et 2,3. Ces valeurs sont considérées comme étant les plus représentatives des surfaces naturelles et elles correspondent probablement à la texture de la surface des versants. À des échelles spatiales plus grandes, on rapporte souvent un changement marqué de la pente du semi-variogramme ou du diagramme de Richardson (équations 5 et 1), ce qui entraîne une augmentation significative de la dimension de Hausdorff (D variant entre 2,4 et 2,6; voir fig. 8 pour les propriétés caractéristiques du semi-variogramme des surfaces topographiques). Les sites du sud de l'Angleterre analysés par Culling et Datko (1987) et Culling (1988a) sont interprétés par les auteurs comme étant des surfaces browniennes fractionnaires où un mécanisme d'évolution des paysages de type davisien est dominant le long des versants. Ces surfaces fractales sont également superposées sur une seconde structure fractale du paysage, de dimension plus élevée et qui est associée au réseau de drainage.

Un deuxième point fondamental a également été relevé par Goodchild (1982) et Roy *et al.* (1987). Il s'agit en fait de la variation de la complexité des surfaces selon l'altitude (variation systématique de la dimension fractale avec l'altitude). Roy *et al.* (1987) et Gravel (1988) ont fait ressortir les liens entre la complexité (ou l'irrégularité) des surfaces, l'altitude et la nature des sédiments (tabl. II). En effet, ils ont noté que la portion du modèle numérique d'altitudes où les dépôts glaciaires sont dominants (fond de vallée) présente une dimension fractionnaire supérieure aux fenêtres correspondant à un sommet et à une surface d'érosion fluviale, tout au moins en ce qui a trait au variogramme de surface et aux profils E-O. La modélisation fractale s'avère ainsi un instrument efficace et précis pour décrire et comparer les propriétés d'ensemble de différentes surfaces topographiques (Elliot, 1989) et une étude plus approfondie devrait être entreprise sur les signatures fractales de terrains caractéristiques (tels que les paysages fluvial, morainique, éolien, structural).

Plusieurs études ont également été effectuées à micro-échelle, soit à des échelles spatiales inférieures au mètre

tion de mouvements à différentes longueurs d'ondes, ont un comportement fractal et que leurs dimensions fractionnaires peuvent être mesurées. Sreenivasan et Meneveau (1986) mentionnent également que la turbulence représente peut-être une collection d'un certain nombre d'entités fractales et que cette notion peut être conciliée avec la vision moderne de la turbulence comme un ensemble de mouvements semi-organisés (Sreenivasan et Meneveau, 1986, p. 382). L'autosimilarité possible de certaines structures turbulentes et la signature statistique (et possiblement fractale) des fluctuations de vélocité dans le champ tridimensionnel pourraient certainement se révéler des aspects à explorer davantage. L'interprétation des processus à partir de la signature fractale et de la valeur de D estimée n'est toutefois pas évidente puisque la signature fractale ne traduit pas nécessairement un processus particulier. Ce point sera abordé plus en détail en discussion.

ANALYSE DES SURFACES TOPOGRAPHIQUES

En géographie physique, l'utilisation la plus intensive de la théorie des fractales consiste en l'analyse des surfaces topographiques, de la micro-échelle (sur quelques centimètres; voir Armstrong, 1986; Whalley et Orford, 1989) à l'échelle de la planète (Mandelbrot, 1982). Ces études procurent une

(voir Brown et Scholz, 1985; Armstrong, 1986; Robert, 1988a, 1988b, 1991). Ces études (tabl. III) ont permis de démontrer clairement qu'à micro-échelle, les surfaces topographiques sont très irrégulières et caractérisées par des valeurs de D allant de 2,5 à 2,9 (Armstrong, 1986; Robert, 1988a, b; Elliot, 1989). La seule exception semble être l'étude de Andrie et Abrahams (1989). Ils rapportent des valeurs très faibles (de l'ordre de 2,10 pour des surfaces ou 1,10 pour des profils longitudinaux ou transects). Andrie et Abrahams (1989) ont toutefois utilisé le diagramme de Richardson pour estimer la dimension fractale de séries unidimensionnelles d'altitudes d'une surface topographique. Cette méthode (équation 1) est généralement employée pour estimer la dimension de Hausdorff de courbes fermées dans un plan (telle une courbe de niveau), alors que les fonctions fractales stochastiques et le semi-variogramme sont utilisés pour estimer la dimension de Hausdorff des séries de points où la

variabilité n'existe que dans une dimension (Burrough, 1984; Culling, 1986a). Les implications méthodologiques à ce niveau ne sont pas claires, mais les travaux de Mandelbrot (1975b) et Culling et Datko (1987) laissent croire que la méthode employée par Andrie et Abrahams (1989) est inappropriée (Roy et Robert, 1990). Une étude détaillée de ce type de problème méthodologique et de l'équivalence des différents algorithmes disponibles pour estimer D devrait également être entreprise. Dans un continuum topographique, les résultats obtenus montrent que la dimension fractale des surfaces varie systématiquement avec l'échelle. D'une façon générale, on prévoit qu'elle soit très élevée à micro-échelle ($D > 2,6$), faible à l'échelle des versants ($D \rightarrow 2,1$) et plus élevée à l'échelle de la structure hydrographique ($D \approx 2,6 - 2,7$). L'imbrication et la transition entre ces dimensions sont encore mal connues et doivent faire l'objet d'une étude particulière en fonction des types de paysages (Roy et Robert, 1990).

En plus de l'irrégularité prononcée de la micro-topographie (en raison des valeurs de D élevées généralement observées), les études récentes ont mis en valeur deux types d'application des fractales en sciences de la Terre. Elliot (1989), par exemple, a considéré la dimension fractale comme indice de rugosité des surfaces permettant de déterminer l'âge relatif des surfaces d'érosion glaciaires, en Norvège. Les propriétés mathématiques de la dimension de Hausdorff en font, selon Culling (1986a), l'indice de rugosité des surfaces le plus informatif. Ces propriétés descriptives de l'indice D ont également permis à Robert (1988b, 1991) de caractériser deux échelles de rugosité associées aux lits de graviers des cours d'eau alluviaux : la rugosité à l'échelle du grain et une seconde, plus irrégulière, correspondant aux petites structures sédimentaires. Dans l'exemple présenté précédemment à la figure 9, ces deux échelles correspondent respectivement à des distances inférieures à 15 cm d'une part, et comprises entre 15 et 75 cm d'autre part. Ces

TABLEAU II

Dimensions fractionnaires moyennes estimées selon différentes méthodes pour les trois sous-surfaces extraites du MNA complet (région de Moose Bog, New Hampshire; d'après Gravel (1988) et Roy et al., 1987).

	Sommet	Fluviale	Glaciaire
Variogramme de surface	2,10	2,13	2,21
Variogramme-profil E-O	1,10 (n=8)	1,11 (8)	1,28 (8)
Variogramme-profil N-S	1,13 (8)	1,17 (8)	1,15 (8)
Courbes de niveau extraites	1,08 (13)	1,07 (9)	1,10 (21)

Les nombres entre parenthèses indiquent le nombre de mesures utilisées pour déterminer la moyenne

TABLEAU III

Analyse fractale et microtopographie des différents types de surfaces naturelles

Auteur	Échelle spatiale (mm)	Étendue des dimensions	Méthode d'estimation	Milieu
Robert (1988a, b)	5-125 70-700	1,52-1,72 1,70-1,91	Variogramme-profil	Lit de rivières
Brown et Scholz	1-10 10-100	1,19-1,52 1,18-1,68	Analyse spectrale	Surface de roche
Armstrong (1986)	20-100 (approximatif)	1,53-1,91	Variogramme-profil	Surface de sol
Elliot (1989)	1-250 100-900	1,60-1,86 1,27-1,64	Variogramme-profil	Till
Gravel (1988)	100-400 100-550	1,25-1,96 1,47-1,89 1,58-1,89 1,16-1,22	Variogramme-profil	Terre agricole
Andrie et Abrahams (1989)	75-1000	1,06-1,20	Diagramme de Richardson	Talus-éboulis

deux échelles de rugosité sont caractérisées par des dimensions fractionnaires supérieures à 1,5 (telles qu'estimées selon l'équation 5) et sont imbriquées dans un profil longitudinal. La rugosité de la surface dans les lits de graviers est hautement irrégulière et difficile à caractériser étant donné la variabilité dans la taille, la forme et l'orientation des cailloux. Cette modélisation descriptive de la configuration du lit permet également d'inférer certaines propriétés significatives de la rugosité hydraulique et du transport des sédiments. En effet, il apparaît raisonnable de penser que chacune des échelles de rugosité du lit, telles qu'identifiées par le modèle fractal, est également associée à un type particulier de résistance et de contrainte de cisaillement sur le lit (Robert, 1988a, b). La rugosité introduite par les structures sédimentaires à petite échelle augmente la résistance à l'écoulement et la force de cisaillement totale, alors qu'une partie seulement de cette force serait disponible pour le transport des cailloux sur le fond du lit. Ces exemples illustrent bien le potentiel des fonctions fractales pour modéliser la micro-topographie ainsi que l'utilisation adéquate et puissante de D comme indice de rugosité. Cet indice permet ainsi la distinction et la comparaison précise entre les échelles de rugosité et les différents types de surfaces topographiques.

FRACTALES, SYSTÈMES DYNAMIQUES ET CHAOS

Les fractales sont intimement liées aux découvertes récentes sur le comportement des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des systèmes qui évoluent dans le temps. Un des objectifs des sciences naturelles est de prévoir l'état futur d'un système à partir de la connaissance de son état initial et d'équations déterministes qui régissent son comportement dans le temps. Le fait que des équations déterministes soient utilisées porte à croire que l'on peut à coup sûr donner l'état du système pour n'importe quel temps à venir. Cependant, certains systèmes comme la circulation de l'atmosphère ou l'écoulement d'un fluide turbulent sont irréductibles à une telle approche, en ce sens qu'ils demeurent imprévisibles à plus ou moins long terme. Il est aujourd'hui reconnu que même des systèmes déterministes simples sont aussi sujet à des comportements imprévisibles, voire erratiques.

Prenons un exemple simple qui a été traité par Lorentz (1964) et May (1976), soit l'équation quadratique ou logistique que l'on retrouve en biologie des populations. Cette équation prévoit la population (X) au temps ($t + 1$) à partir de la connaissance de la population au temps t et d'un paramètre r . L'équation s'écrit comme suit

$$X_{t+1} = r X_t (1 - X_t) \quad (8)$$

où

$$0 < r < \infty \quad (9)$$

et

$$0 \leq X \leq 1. \quad (10)$$

Donc, connaissant X_0 soit l'état initial du système et fixant le paramètre r , on peut trouver par itération la valeur de X pour n'importe quel temps futur. Le tableau IV présente des séquences temporelles de X pour différentes conditions initiales et pour un r de 2. De telles séquences temporelles sont appelées orbites. Dans tous les cas la valeur de X se stabilise et atteint un point fixe (0,500). Ce point de convergence, aussi nommé attracteur est constant quelle que soit la valeur initiale du système, donc le système converge vers un état unique et il est stationnaire. On peut représenter le comportement du système ou son orbite en utilisant une approche graphique telle qu'illustrée à la figure 11. Dans ce graphe, la courbe correspond à la fonction quadratique et la droite, à la ligne où les valeurs de X_t et X_{t+1} sont égales. Pour décrire la trajectoire suivie d'une itération à l'autre il s'agit de partir avec un X_0 sur l'axe X_t , et de projeter verticalement cette valeur sur la courbe. La rencontre entre la verticale et la courbe donne

TABLEAU IV

Orbites de l'équation quadratique pour $r = 2,0$ et différentes valeurs initiales de X

Itération	Valeurs de X			
0	0,100	0,200	0,400	0,500
1	0,180	0,320	0,480	0,500
2	0,295	0,435	0,499	0,500
3	0,416	0,492	0,500	0,500
4	0,486	0,500	0,500	0,500
5	0,500	0,500	0,500	0,500
6	0,500	0,500	0,500	0,500
7	0,500	0,500	0,500	0,500

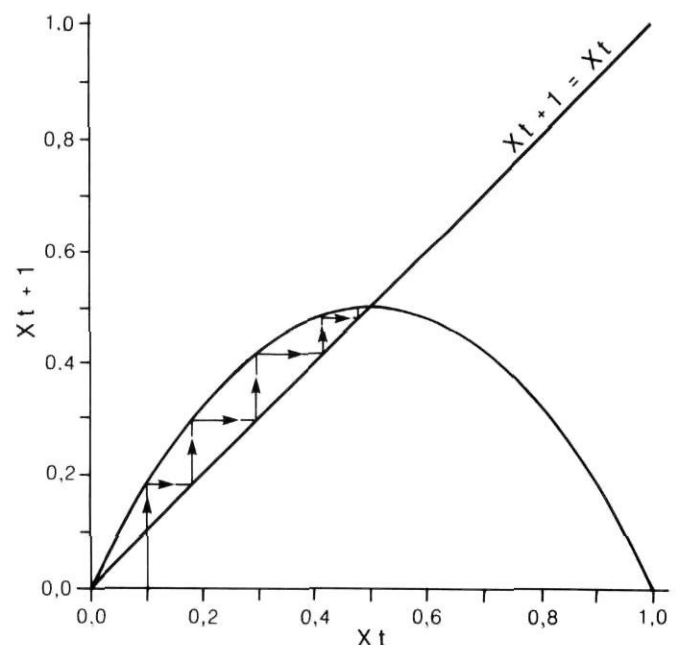
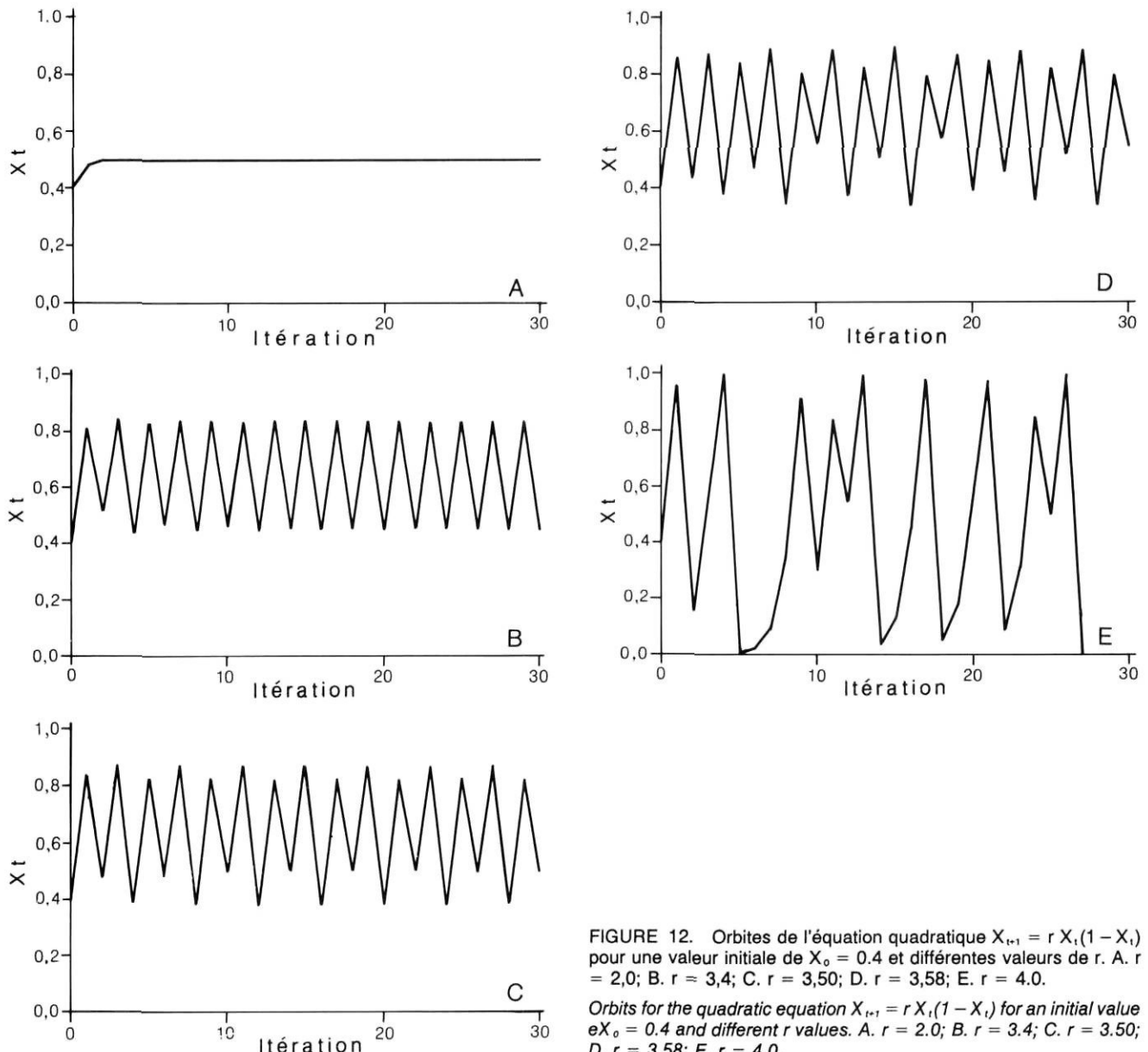


FIGURE 11. Illustration de la méthode graphique appliquée à l'équation quadratique. La courbe représente $X_{t+1} = 2 X_t(1 - X_t)$ et la valeur initiale est $X_0 = 0,1$.

Illustration of the graphic method for the quadratic equation. In this case, the curve represents $X_{t+1} = 2 X_t(1 - X_t)$ and the initial value is $X_0 = 0,1$.

la nouvelle valeur après la première itération. Pour obtenir la seconde itération, il s'agit de retourner cette nouvelle valeur dans l'équation, ce qui revient à la projeter sur la droite pour ensuite la retourner vers la courbe et ainsi de suite pour les prochaines itérations. À la figure 11, on remarque que la trajectoire converge vers un point fixe. Dans cet exemple, on peut sans erreur prévoir l'état stationnaire du système à long terme. Lorsque X_0 est égal à 0 ou 1, la solution est 0, alors que pour les autres valeurs initiales la solution est donnée par $1 - 1/r$. Ceci est valable pour $1 < r < 3$. Qu'arrive-t-il lorsque r augmente? La figure 12 montre les séquences temporelles de systèmes avec différentes valeurs de r et une même valeur initiale ($X_0 = 0,40$). À première vue, on constate immédiatement une variabilité croissante dans le comportement du système en fonction de r . Aussi, le nombre de points fixes augmente et le système tend à osciller périodiquement entre les points fixes. Pour $r = 4,0$, on observe un com-

portement irrégulier. L'effet de r comme paramètre de contrôle a largement été étudié et on connaît les bornes où le système change de comportement (pour une revue, voir Goodings, 1991b). De fait, à partir de $r = 3,0$, le nombre de points fixes passent à deux; à $r = 3,45$, il double et passe à quatre. Le nombre double ensuite rapidement avec de petits changements dans la valeur de r et on observe un comportement irrégulier à partir de $r = 3,57$. De plus, si on utilise des valeurs initiales très rapprochées pour une valeur élevée de r comme par exemple $r = 4,0$, on note que les orbites divergent à partir d'un certain nombre d'itérations (fig. 13). Cette dépendance sensitive aux conditions initiales du système est la propriété fondamentale d'un comportement que l'on qualifie de chaotique (voir Ruelle, 1991). Techniquement, si la divergence est exponentielle avec le temps, le taux auquel la divergence s'effectue permet de quantifier le chaos dans une série. Ainsi, lorsqu'il devient impossible de prévoir le compor-



tement à long terme du système ou l'effet de changements extrêmement faibles dans les valeurs initiales, on entre dans le chaos déterministe.

Quelle est l'importance des résultats obtenus à partir de l'équation quadratique et que peut-on en tirer en ce qui concerne les systèmes naturels? D'abord, il faut dire qu'est née

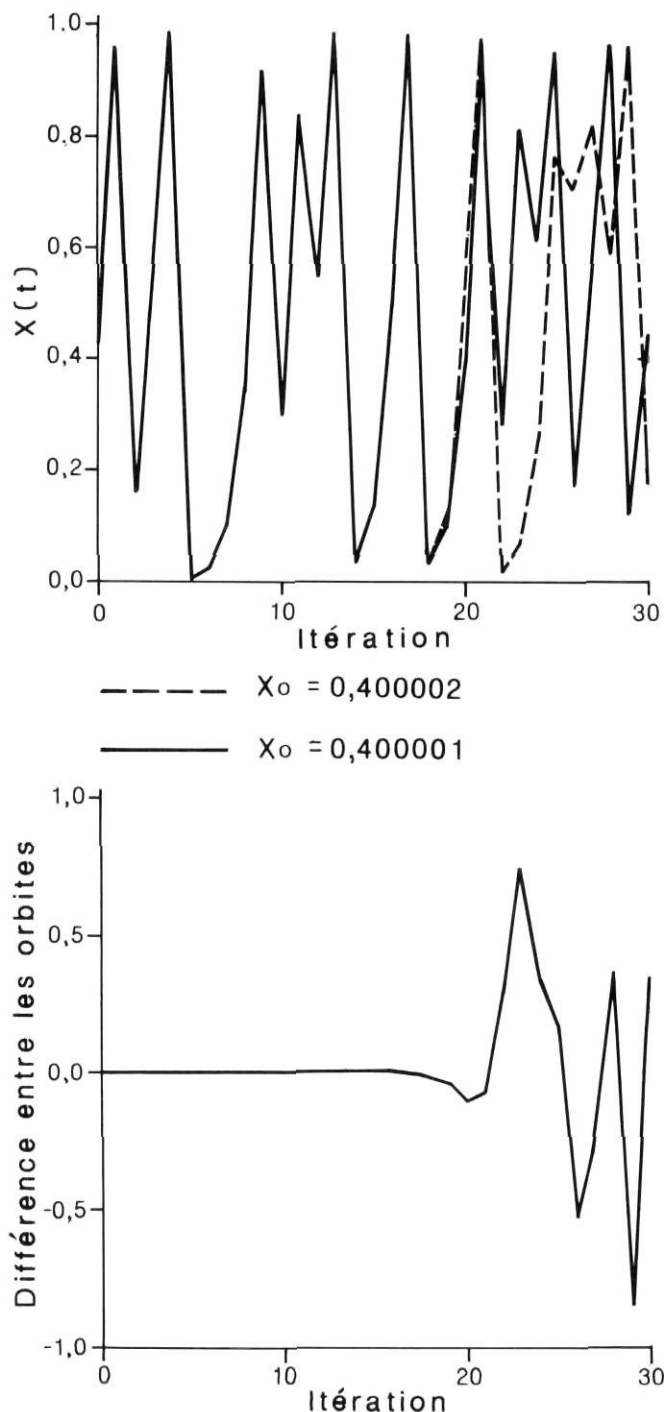


FIGURE 13. Orbits de l'équation quadratique $X_{t+1} = 4X_t(1-X_t)$ pour deux valeurs de X_0 très rapprochées.

Orbits for the quadratic equation $X_{t+1} = 4X_t(1-X_t)$ for two closed values of X_0 .

de l'équation quadratique une famille extrêmement riche de fonctions qui ont permis d'élaborer des ensembles fascinants (pour une revue, voir Peitgen et Saupe, 1988) qui produisent des images d'une complexité encore jamais soupçonnée. Mais au-delà de cette fascination qu'en est-il? Malgré sa simplicité, l'équation quadratique est une illustration éloquent du chaos déterministe. Elle permet, justement par sa simplicité, une exploration relativement facile de la transition vers le chaos ou la turbulence dans un système et de comprendre ainsi ce qui peut se manifester dans un système régi par une équation déterministe. La cascade du doublement du nombre de points fixes est une route vers le chaos que l'on retrouve dans d'autres systèmes (Goodings, 1991b). De plus, tous les systèmes déterministes décrits par des équations non linéaires sont sujets à un comportement chaotique. L'étude de l'équation quadratique permet de comprendre intuitivement ce qui se passe dans des systèmes complexes comme les fluides en mouvement. Ainsi, la transition vers le chaos peut s'appliquer au mouvement d'un fluide passant de laminaire à turbulent. La turbulence est vue comme un comportement chaotique issu des équations non linéaires qui la gouvernent (Ruelle et Takens, 1971; Tritton, 1989; Ruelle, 1991).

Les fractales interviennent dans l'étude des systèmes dynamiques pour décrire leur comportement. Étant un outil qui permet de saisir mathématiquement la complexité des trajectoires, les fractales sont tout indiquées pour distinguer quantitativement les orbites ou l'évolution dans le temps des systèmes. Les itérations successives des systèmes chaotiques peuvent se traduire par des propriétés fractales. Dans un système chaotique, la trajectoire peut tendre vers un ou plusieurs attracteurs que l'on qualifie d'étranges (Lorentz, 1963; Grassberger et Procaccia, 1983). L'analyse de ces attracteurs est possible par les fractales.

En quoi ces découvertes sont-elles importantes pour les sciences de la Terre? Plusieurs auteurs ont déjà signalé des avenues nouvelles qui découlent du chaos déterministe et de l'étude des systèmes dynamiques (Culling, 1987b; Huggett, 1988; Malanson *et al.*, 1990; Middleton, 1990, 1991). Dans les domaines du climat (Nicolis et Nicolis, 1984, 1987; Lorentz, 1984; Grassberger, 1986) ou de la dynamique de la croûte et du manteau de la Terre (Kellog et Turcotte, 1990; Turcotte, 1989), des progrès importants sont imputables à l'avènement de la théorie du chaos. Le climat est reconnu pour son irrégularité et son imprévisibilité et a d'ailleurs figuré de façon importante dans les découvertes sur le chaos (Lorentz, 1963). En géomorphologie, par contre, les applications s'avèrent plus difficiles. Ceci s'explique en partie par l'absence d'un corpus théorique soutenu et essentiellement mathématique des systèmes géomorphologiques. Cette lacune rend impossible l'exploration des équations qui décrivent les systèmes géomorphologiques puisque la description quantitative des systèmes semble un prérequis à l'étude dynamique. Puisque les applications proprement géomorphologiques se font encore peu nombreuses, une bonne partie de ce qui est paru sur le sujet tente de montrer le potentiel de ce champ d'étude tout en dégageant les répercussions conceptuelles importantes qu'occasionnent ces découvertes. On reconnaît que la dépendance sensitive du comportement

d'un système aux conditions initiales est cruciale. En géomorphologie, le concept d'équifinalité domine depuis que la théorie générale des systèmes soutient l'élaboration des concepts dynamiques (Chorley, 1962). L'équifinalité signifie que les conditions initiales n'affectent pas l'état final du système. Eu égard à ce que nous savons des systèmes dynamiques, cette vision est très limitante et ne correspond qu'à une portion (probablement la moins intéressante) des comportements possibles (Culling, 1987b) ou à des systèmes linéaires. Il serait avantageux de remplacer le concept d'équifinalité par une caractérisation des systèmes utilisant leur stabilité potentielle. La dépendance sensitive aux conditions initiales signifie aussi que même une légère imprécision dans la détermination de l'état initial du système peut entraîner une différence importante dans la prévision à long terme de son comportement.

Puisque les mécanismes de transport en géomorphologie sont régis par des équations de mouvement non linéaires, l'étude des processus devrait bénéficier des connaissances sur les systèmes chaotiques. Les mécanismes donnant naissance à la turbulence en particulier joueront un rôle crucial dans notre compréhension du système fluvial. Étant donné la présence quasi certaine de comportements irréguliers dans les mécanismes de transport, on devrait observer des traces d'instabilité à différentes échelles du paysage.

Des applications récentes viennent confirmer l'intérêt de la théorie du chaos pour la géomorphologie. Phillips (1992) a traité de la réponse des terres humides aux fluctuations du niveau marin. L'auteur postule la présence d'un comportement chaotique dans les systèmes géomorphologiques et tente de déterminer dans quelle mesure il est présent. La méthode préconisée est semi-quantitative. Ceci a permis de contourner la difficulté inhérente à l'absence d'une description mathématique adéquate du système. Le point de départ de l'analyse est une matrice des liens entre les composantes du système (fig. 14). La méthode repose sur un système d'équations basées sur les relations entre les composantes du système. Les effets de rétroaction causés par la végétation (fig. 14) sont particulièrement importants dans le contrôle du système. Ainsi, l'auteur montre que si la rétroaction est positive le système est généralement chaotique et que, par contre, si elle est négative, le système est instable et potentiellement chaotique. L'analyse graphique analogue à celle présentée à la figure 11 peut aussi être mise à profit comme le font Arlinghaus *et al.* (sous presse). Les auteurs montrent

qu'une différence minime dans la relation souvent asymétrique entre la production de sol et l'épaisseur du sol conduisent à des comportements différents du système. Ainsi, une quantification exacte de la courbe est requise afin de décrire le comportement du système avec justesse. La méthode d'ajustement de la courbe aux données s'avère donc critique.

L'analyse des séries temporelles recèle un potentiel énorme pour la mise en évidence du comportement des systèmes (Goodings, 1991a). En l'absence d'une théorie mathématique, les fluctuations dans le temps de l'état d'un système permettent une analyse du degré de stabilité. Cette approche s'avère particulièrement prometteuse pour les sciences de la Terre puisqu'elle permet de mettre en évidence la présence de comportement chaotique de faible dimension. Des techniques de corrélation sont particulièrement utiles pour l'analyse des séries. Des travaux en dynamique des fluides sur la convection montrent un comportement décrit par une dimension relativement faible (Malraison *et al.*, 1983). Il faut cependant utiliser ces techniques avec prudence (Ruelle, 1990; Goodings, 1991a).

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Grâce à la théorie des fractales, la complexité des phénomènes naturels ne résiste plus à l'analyse mathématique et à la description géométrique. De plus, elle permet d'exprimer la variabilité spatiale des phénomènes naturels en fonction de l'échelle d'observation et, de ce fait, les notions fondamentales comme l'autosimilarité et la dimension fractionnaire possèdent une composante géographique évidente. L'utilisation adéquate de ces concepts s'avère prometteuse et tout à fait pertinente pour l'avenir de la science géographique. Il a ainsi été clairement démontré que plusieurs phénomènes naturels possèdent certaines propriétés fractales, c'est-à-dire une variation de la complexité ou de l'irrégularité selon le degré de résolution. En milieu naturel, les fonctions stochastiques fractales ne sont toutefois applicables qu'en bandes étroites, séparées ou non par des zones de transition. Différents facteurs peuvent être invoqués pour expliquer cette structure fractale généralement rencontrée en milieu naturel. Parmi ces exemples, on peut mentionner la taille limite des structures sédimentaires observées dans les cours d'eau alluviaux (Robert, 1988a, b), des changements dans les processus physiques (Goodchild, 1982; Roy *et al.*, 1987; Montgomery et Dietrich, 1992), la discontinuité entre l'échelle spatiale des versants et celle des réseaux de drainage

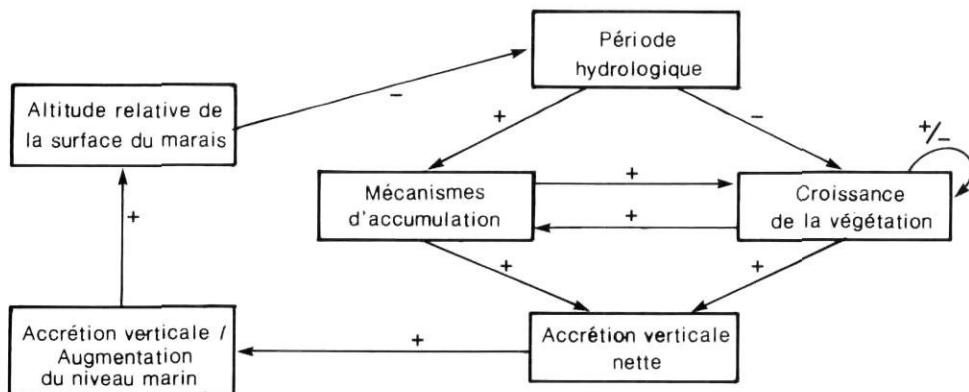


FIGURE 14. Ensemble des relations utilisées par Phillips (1992) dans une analyse de la stabilité des terres humides.

Set of relations used by Phillips (1992) in the analysis of the stability of wetlands.

(Culling et Datko, 1987), la faible profondeur de plusieurs cours d'eau qui limite le développement de structures turbulentes de grande taille, etc. Les différences observées entre le modèle et les données peuvent donc permettre d'inférer des variations de processus avec l'échelle ou la localisation et de ce fait, contribuer de façon singulière à l'explication de certains phénomènes géomorphologiques.

Les méthodes employées pour estimer la dimension de Hausdorff sont variées. Nous avons décrit les deux plus importantes (tout au moins les plus utilisées), soit le diagramme de Richardson pour les courbes fermées dans un plan, et le semi-variogramme pour les séries unidimensionnelles. Différents algorithmes reliés à la méthode de Richardson sont également présentés par Longley et Batty (1989 a, b) et Hayward *et al.* (1989). Roy *et al.* (1987) ont également noté que la dimension fractionnaire estimée à partir d'une surface est du même ordre de grandeur que la moyenne des valeurs de D obtenues à partir de profils ou de courbes de niveau. Toutefois, le variogramme des surfaces masque généralement la variation de D selon la direction et l'altitude, et cette technique devrait être employée avec prudence. Le variogramme global peut donc masquer des écarts locaux importants dans la valeur de D et un certain nombre d'incertitudes demeurent dans l'interprétation des variogrammes de surface, principalement.

Finalement, deux approches se sont constituées sur la modélisation fractale des phénomènes géographiques. La première consiste principalement en l'utilisation des fractales comme hypothèse nulle, c'est-à-dire comme point de référence qui sert à étudier les propriétés statistiques des séries spatiales de données reliées à des phénomènes naturels (Burrough, 1984, 1985; Goodchild et Mark, 1987; Goodchild, 1988). Dans le cas plus précis des propriétés statistiques des surfaces topographiques, la propriété d'autosimilarité des surfaces fractales permet leur utilisation comme hypothèse nulle (ou surface initiale) pour l'étude des processus géomorphologiques (Goodchild et Mark, 1987). La plupart des études en géomorphologie et autres domaines des sciences naturelles montrent que les phénomènes naturels ne présentent les propriétés fractales que pour d'étroites bandes. La dimension fractale peut donc varier de façon très importante avec l'étendue d'échelles considérées. L'utilisation des fractales en tant qu'hypothèse nulle s'est donc avérée plutôt fructueuse puisque l'absence d'autosimilarité permet certaines conclusions sur les processus en cause.

Une deuxième approche sur la modélisation fractale des surfaces topographiques a été élaborée par W.E.H. Culling dans une série d'articles récents (Culling, 1986b, 1987a, 1988 a, 1988 b, 1989; Culling et Datko, 1987). Les travaux de Culling visent essentiellement à établir les liens entre les fractales, la théorie du chaos dans un contexte géomorphologique et les systèmes dynamiques. Culling intègre ainsi les processus dans la modélisation des surfaces topographiques. Il établit des liens entre les surfaces fractales et la théorie de la diffusion comme mécanisme d'évolution des surfaces géomorphologiques recouvertes d'un sol et montre qu'une surface fractale est le résultat de l'évolution davisienne des paysages. Un des points fondamentaux qui se

dégage des travaux de Culling consiste en l'utilisation des fractales comme fondement théorique en sciences de la Terre. Cette approche, d'un niveau conceptuel et mathématique élevé, permet néanmoins de montrer que l'emploi des fractales en géographie déborde la mesure et la modélisation descriptive. Culling a aussi ouvert la voie à ce qui pourrait se révéler être un progrès fondamental des sciences naturelles au cours des prochaines années.

REMERCIEMENTS

Nous désirons remercier Mike Church et un lecteur critique anonyme pour les commentaires sur la version originale de cet article.

RÉFÉRENCES

- Ahnert, F., 1984. Local relief and the height limits of mountain ranges. *American Journal of Science*, 284: 1035-1055.
- Adler, R.J., 1981. *The Geometry of Random Fields*. Wiley, New York.
- Ait-Kheddache, A. et Raiola, S.A., 1987. Use of fractal parameters to determine local spatio-temporal characteristics of a turbulent pollutant from video images. *Proceedings of the 25th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computer*, University of Illinois, 473-482.
- Andrie, R. et Abrahams, A.D., 1989. Fractal techniques and the surface roughness of talus slopes. *Earth Surface Processes and Landforms*, 14: 197-209.
- Arlinghaus, S.L., Nystuen, J.D. et Woldenberg, M.J., 1992. Graphical analysis: An application to semi-desert soils. *Geographical Review*, 82: 244-252.
- Armstrong, A.C., 1986. On the fractal dimension of some transient soil properties. *Journal of Soil Science*, 37: 641-652.
- Batty, M., 1985. Fractals — geometry between dimensions. *New Scientist*, 105: 31-35.
- Besicovitch, A.S., 1929. On linear sets of fractional dimension. *Mathematische Annalen*, 101: 161-193.
- Bradbury, R.H. et Reichelt, R.E., 1983. Fractal dimension of a coral reef at ecological scales. *Marine Ecology Progress Series*, 10: 169-171.
- Bradbury, R.H., Reichelt, R.E. et Green, D.G., 1984. Fractals in ecology: methods and interpretation. *Marine Ecology Progress Series*, 14: 295-296.
- Brown, S.R. et Scholz, C.H., 1985. Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 90(B14): 12575-12582.
- Burrough, P.A., 1981. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature*, 294: 240-242.
- 1983a. Multiscale sources of spatial variation in soil. I. Application of fractal concepts to nested levels of variation. *Journal of Soil Science*, 34: 577-597.
- 1983b. Multiscale sources of spatial variation in soil. II. A non-Brownian fractal model and its application in soil survey. *Journal of Soil Science*, 34: 599-620.
- 1983c. Problems of superimposed effects in the statistical study of the spatial variation of soil. *Agricultural Water Management*, 6: 123-143.
- 1984. The application of fractal ideas to geophysical phenomena. *The Journal of Mathematics and its Applications*, 20, 36-42.
- 1985. Fakes, facsimiles and facts: fractal models of geophysical phenomena, p. 151-168. *In* S. Nash, éd., *Science and Uncertainty*. London, IBM/Science Reviews Ltd.
- 1987. Multiscale sources of spatial variation and how to deal with them. *Proceedings, Eight International Symposium on Computer-Assisted Cartography (Auto-Carto)*, Baltimore, p. 145-154.

- Chorley, R.S., 1962. *Geomorphology and General Systems Theory*. United States Geological Survey Professional Paper 500-B, 10 p.
- Church, M. et Mark, D.M., 1980. On size and scale in geomorphology. *Progress in Physical Geography*, 4: 342-390.
- Culling, W.E.H., 1986a. Highly erratic spatial variability of soil-pH on Iping Common, West Sussex. *Catena*, 13: 81-98.
- 1986b. On Hurst phenomena in the landscape. *Transactions, Japanese Geomorphological Union*, 7: 221-243.
- 1987a. Ergodicity, entropy, and dimension in the soil covered landscape. *Transactions, Japanese Geomorphological Union*, 8: 157-174.
- 1987b. Equifinality: modern approaches to dynamical systems and their potential for geographical thought. *Transactions, Institute of British Geographers*, 12: 57-72.
- 1988a. Dimension and entropy in the soil-covered landscape. *Earth Surface Processes and Landforms*, 13: 619-648.
- 1988b. A new view of the landscape. *Transactions, Institute of British Geographers*, 13: 345-360.
- 1989. The characterization of regular/irregular surfaces in the soil-covered landscape by Gaussian random fields. *Computer and Geosciences*, 15: 219-226.
- Culling, W.E.H. et Datko, M., 1987. The fractal geometry of the soil-covered landscape. *Earth Surface Processes and Landforms*, 12: 369-385.
- Elliot, J.K., 1989. An investigation of the change in surface roughness through time on the Foreland of Austre Okstindbreen, North Norway. *Computer and Geosciences*, 15: 209-217.
- Falconer, K.J., 1985. *The Geometry of Random Fields*. Cambridge University Press, London.
- Fox, C.G., 1989. Empirically derived relationships between fractal dimension and power law from frequency spectra. *Pure and Applied Geophysics*, 131: 211-239.
- Goodchild, M.F., 1980. Fractals and the accuracy of geographical measures. *Mathematical Geology*, 12: 85-98.
- 1982. The fractional Brownian process as a terrain simulation model. *Modelling and Simulation*, 13: 1133-1137.
- 1988. Lakes on fractal surfaces: A null hypotheses for lake-rich landscape. *Mathematical Geology*, 20: 615-630.
- Goodchild, M.F. et Mark, D.M., 1987. The fractal nature of geographic phenomena. *Annals of the American Association of Geographers*, 77: 265-278.
- Goodings, D., 1991a. Chaos in time series. In G.V. Middleton, éd., *Non-linear Dynamics, Chaos and Fractals with Applications to Geological Systems*. Geological Association of Canada, Short Course Notes 9, 235 p.
- 1991b. Routes to chaos. In G.V. Middleton, éd., *Non-linear Dynamics, Chaos and Fractals with Applications to Geological Systems*. Geological Association of Canada, Short Course Notes 9, 235 p.
- Grassberger, P., 1986. Do climatic attractors exist? *Nature*, 323: 609-612.
- Grassberger, P. et Procaccia, I., 1983. Measuring the strangeness of attractors. *Physica D*, 9: 189-208.
- Gravel, G., 1988. L'utilisation des fractales dans la description et la représentation des surfaces topographiques. Mémoire de maîtrise, Département de géographie, Université de Montréal.
- Gupta, V.K. et Waymire, E., 1989. Statistical self-similarity in river networks parameterized by elevation. *Water Resources Research*, 25: 463-476.
- Hack, J.T., 1957. Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. United States Geological Survey Professional Paper, 294-B: 45-94.
- Hausdorff, F., 1919. Dimension und ausseres Mass. *Mathematische Annalen*, 79: 157-179.
- Hayward, J., Orford, J.D. et Whalley, W.B., 1989. Three implementations of fractal analyses of particle outlines. *Computer and Geosciences*, 15: 199-207.
- Hjelmfelt, A.T., 1988. Fractals and the river length catchment area ratio. *Water Resources Bulletin*, 24: 455-459.
- Horton, R.E., 1945. Erosional development of streams and their drainage basins: hydrophysical approach to quantitative morphology. *Geological Society of America Bulletin*, 56: 275-370.
- Huggett, R.J., 1988. Dissipative systems: implications for geomorphology. *Earth Surface Processes and Landforms*, 13: 45-49.
- Hurst, H.E., 1951. Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions, American Society of Civil Engineers*, 76: 770-800.
- Jones, J.G., Thomas, R.W. et Earwicker, P.G., 1989. Fractal properties of computer-generated and natural geophysical data. *Computer and Geosciences*, 15: 227-235.
- Kellogg, L.H. et Turcotte, D.L., 1990. Mixing and the distribution of heterogeneities in a chaotically convecting mantle. *Journal of Geophysical Research*, 95B: 421-432.
- Kirkby, M.J., 1987. The Hurst effect and its implications for extrapolating process rates. *Earth Surface Processes and Landforms*, 12: 57-67.
- Klemes, V., 1974. The Hurst phenomenon — A puzzle? *Water Resources Research*, 10: 675-688.
- Klinkenberg, B. et Goodchild, M.F., 1992. The fractal properties of topography: a comparison of methods. *Earth Surface Processes and Landforms*, 17: 217-234.
- La Barbera, P. et Rosso, R., 1989. On the fractal dimension of stream networks. *Water Resources Research*, 25: 735-741.
- Longley, P.A. et Batty, M., 1989a. Fractal measurement and line generalization. *Computer and Geosciences*, 15: 167-183.
- 1989b. On the fractal measurement of geographical boundaries. *Geographical Analysis*, 21: 47-67.
- Lorentz, E.N., 1963. Deterministic non-periodic flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20: 130-141.
- 1964. The problem of deducing the climate from the governing equations. *Tellus*, 16: 1-11.
- 1984. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere. *Tellus*, 36A: 98-110.
- Lovejoy, S., 1982. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science*, 216: 185-187.
- Lovejoy, S. et Mandelbrot, B.B., 1985. Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus*, 37A: 209-23.
- McBratney, A.B. et Webster, R., 1986. Choosing functions for semi-variograms of soil properties and fitting them to sampling estimates. *Journal of Soil Science*, 37: 617-639.
- McLeod, A.I. et Hipel, K.W., 1978. Preservation of the rescaled range. I. A reassessment of the Hurst phenomenon. *Water Resources Research*, 14: 491-508.
- Malanson, G.P., Butler, D.R. and Walsh, S.J., 1990. Chaos theory in physical geography. *Physical Geography*, 11: 293-304.
- Malraison, B., Atten, P., Berge, P. et Dubois, M., 1983. Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems. *Journal de Physique, Lettres*, 44: L897-L892.
- Mandelbrot, B.B., 1965. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi: application à la loi climatique de H.E. Hurst. *Comptes Rendus (Paris)*, 260: 3274-3277.
- 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156: 636-638.
- 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of higher moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62: 331-358.
- 1975a. Les objets fractals: forme, hasard, et dimension. Flammarion, Paris.
- 1975b. Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines and the number area rule for islands. *Proceedings of the National Academy of Science (USA)*, 72: 3825-3828.

- 1975c. On the geometry of homogeneous turbulence with stress on the fractal dimension of the iso-surface of scalars. *Journal of Fluid Mechanics*, 72: 401-416.
- 1977. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. Freeman, San Francisco.
- 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco.
- 1985. Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica Scripta*, 32: 257-260.
- Mandelbrot, B.B. et Van Ness, J.W., 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 10: 422-437.
- Mandelbrot, B.B. et Wallis, J.R., 1968., Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resources Research*, 4: 909-918.
- 1969a. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resources Research*, 5: 228-267.
- 1969b. Some long run properties of geophysical records. *Water Resources Research*, 5: 321-340.
- Mark, D.M., 1984. Fractal dimension of a coral reef at ecological scales: a discussion. *Marine Ecology Progress Series*, 14: 293-294.
- Mark, D.M. et Aronson, P.B., 1983. Scale dependent fractal dimension of topographic surfaces: an empirical investigation with applications in geomorphology and computer mapping. *Mathematical Geology*, 16: 671-683.
- May, R. M., 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261: 459-467.
- Mesa, O.J. et Gupta, V.K., 1987. On the main channel length-area relationship for channel networks. *Water Resources Research*, 23: 2119-2122.
- Middleton, G.V., 1990. Non-linear dynamics and chaos: Potential applications in the Earth Sciences. *Geoscience Canada*, 17: 3-11.
- édit., 1991. Nonlinear dynamics, chaos and fractals, with applications to geological systems. Geological Association of Canada, Short Course Notes 9, 235 p..
- Montgomery, R. et Dietrich, W.E., 1992. Channel initiation and the problem of landscape scale. *Science*, 255: 826-830.
- Nicolis, C. et Nicolis, G., 1984. Is there a climatic attractor? *Nature*, 311: 529-532.
- 1987. Evidence for climatic attractors. *Nature*, 326: 523.
- Oliver, M.A. et Webster, R., 1986. Semi-variogram for modelling the spatial pattern of landform and soil properties. *Earth Surface Processes and Landforms*, 11: 491-504.
- Orey, S., 1970. Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level crossings. *Zeit. Wahrscheinlichkeits Theorie und Verw. Gebiete*, 15: 249-256.
- Orford, J.D. et Whalley, W.B., 1983. The use of the fractal dimension to quantify the morphology of irregular shaped particles. *Sedimentology*, 30: 655-688.
- Peitgen, H.-O. et Richter, P.H., 1986. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, Berlin.
- Peitgen, H-O et Saupe, D., édit., 1988. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York.
- Pentland, A.P., 1984. Fractal-based description of natural scenes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAM1-6: 661-674.
- Phillips, J.D., 1992. Qualitative chaos in geomorphic systems, with an example from wetland response to sea level rise. *The Journal of Geology*, 100: 375-384.
- Richardson, L.F., 1961. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook*, 6: 139-187.
- Robert, A., 1988a. Statistical properties of sediment bed profiles in alluvial channels. *Mathematical Geology*, 20: 205-225.
- 1988b. *Statistical Modelling of Sediment Bed Profiles and Bed Roughness Properties in Alluvial Channels*. Thèse de Ph.D., Department of Geography, University of Cambridge.
- 1991. Fractal properties of simulated bed profiles in coarse-grained channels. *Mathematical Geology*, 23: 367-382.
- Robert, A. et Roy, A.G., 1990. On the fractal interpretation of the mainstream length-drainage area relationship. *Water Resources Research*, 26: 839-842.
- Rogers, C.A., 1970. *Hausdorff Measures*. Cambridge University Press, London.
- Rosso, R., Bacchi, B. et La Barbera, P., 1991. Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks. *Water Resources Research*, 27: 381-387.
- Roy, A.G., Gravel, G. et Gauthier, C., 1987. Measuring the dimension of surfaces: a review and appraisal of different methods. *Proceedings, Eight International Symposium on Computer-Assisted Cartography (Auto-Carto)*, Baltimore, p. 68-77.
- Roy, A.G. et Robert, A., 1990. Fractal techniques and the surface roughness of talus slopes: A comment. *Earth Surface Processes and Landforms*, 15: 283-285.
- Ruelle, D., 1990. Deterministic chaos: the science and the fiction. *Proceedings of the Royal Society of London*, A427: 214-248.
- 1991. *Hasard et Chaos*. Odile Jacob, Paris, 248 p.
- Ruelle, D. et Takens, F., 1971. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20: 167-192.
- Snow, R.S., 1989. Fractal sinuosity of stream channels. *Pure and Applied Geophysics*, 131: 99-109.
- Sreenivasan, K.R., 1986. Chaos in open flow systems, p. 222-232. *In* G. Mayer-Kress, édit., *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York.
- 1991. Fractals and multifractals in fluid turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23: 539-600.
- Sreenivasan, K.R. et Meneveau, C., 1986. The fractal facets of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173: 357-386.
- Sreenivasan, K.R., Prasad, R.R., Meneveau, C. et Ramshankar, R., 1989. The fractal geometry of interfaces and the multifractal distribution of dissipation in fully turbulent flows. *Pure and Applied Geophysics*, 131: 43-60.
- Stark, C.P., 1991. An invasion percolation model of drainage network evolution. *Nature*, 352: 423-424.
- Strahler, A.N., 1957. Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Transactions, American Geophysical Union*, 63: 1117-42.
- Tarboton, D.G., Bras, R.L. et Rodriguez-Iturbe, I., 1988. The fractal nature of river networks. *Water Resources Research*, 24: 1317-1322.
- Thornes, J., 1990. Big rills have little rills... *Nature*, 345: 764-765.
- Tritton, D.J., 1988. *Physical Fluid Dynamics*. Clarendon Press, Oxford.
- Turcotte, D.L., 1989. Fractals in geology and geophysics. *Pure and Applied Geophysics*, 131: 171-196.
- Voss, R.F., 1988. Fractals in nature: from characterization to simulation, p. 21-71. *In* H.-O. Peitgen et D. Saupe, édit., *The Science of Fractal Images*.
- Whalley, W.B. et Orford, J.D., 1982. Analysis of scanning electron microscopy images of sedimentary particle form by fractal dimension and Fourier analysis methods. *Scanning Electron Microscopy*, 11: 639-647.
- 1989. The use of fractals and pseudo-fractals in the analysis of two-dimensional outlines: review and further exploration. *Computer and Geosciences*, 15: 185-197.